Números Reales (R)

El conjunto de los números reales resulta de la ampliación de otros conjuntos numérico, los cuales se mencionan a continuación:

- **Conjunto de los números naturales (N):**

Es el conjunto de números que está formado por aquellos que nos sirven para contar y son: 1, 2, 3, 4… Y son representados por la letra **N** (mayúscula).

- **Conjunto de números enteros (Z):**

Es el conjunto cuyo elemento están formulados por los números: …-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4… y se representan con la letra (**Z**).

  - **Conjunto de números enteros no negativos (Z*):**

    Es el conjunto cuyo elemento están formulados por los números: … 0, 1, 2, 3, 4…

  - **Conjunto de números enteros negativos (Z):**

    Es el conjunto cuyo elemento están formulados por los números: -1, -2, -3, -4, -5…

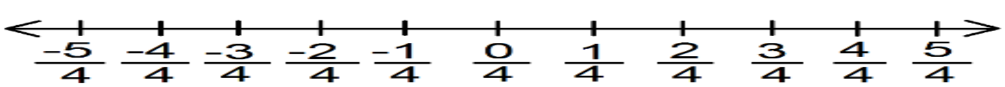
- **Conjunto de los números racionales (Q):**

Es el conjunto de cuyo elemento se pueden presentar en forma (a/b), donde (b) tiene que ser distinta que (0); esos pueden ser positivos o negativos y se representan con la letra **Q** (mayúscula). por ejemplo; 2/3, 7/5, - 4/6, (4 = 4/1), (-6 = - 6/1), etc…

- **Conjunto de números irracionales (I):**

Es el conjunto de números que no se pueden expresar como cociente (división) de 2 enteros ejemplo (a/b).
Dicho en otras palabras, son aquellos números cuya representación decimal es infinita y no periódica.
Ejemplo: √ 2, √ 3, π, etc… donde éstos nunca llegaran a ser fracción.

Nota: La unión de los conjuntos de los números racionales y de los números irracionales constituyen el conjunto de los números reales y éste a su vez se representa con la letra **R**.



OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS REALES

Las operaciones fundamentales del álgebra son la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación. Cada una de estas operaciones será objeto de estudio, pero con el fin de facilitar su aprendizaje se comenzará estudiando sus propiedades de la aritmética, con el propósito de comprender hacer más fácil la resolución de problemas.

Propiedades de los números reales

1.- **Propiedad Conmutativa**.- esta propiedad señala que el orden de los sumandos no altera la suma; o bien el orden de los factores no altera el producto, es decir:
a + b = b + a
Ejemplo 1:
12 + 3 = 3 + 12
(u)(v)= (v)(u)
Ejemplo 2:
(3)(5)= (5)(3)

2.- **Propiedad Asociativa**.- esta propiedad señala que si se quiere efectuar la suma de los números reales a, b y c, sin cambiar el orden de los sumando se tienen dos opciones, y son:
a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)
Ejemplo 1:
6 + 3 + 1 = (6+3)+1 = 6+ (3+1)
Multiplicación:
(ab)c = a(bc)

3.- **Propiedad Identidad.-** dice que la suma de cero a cualquier cantidad, se obtendrá el mismo número, y en el caso de la multiplicación, cualquier cantidad multiplicada por uno, se obtiene el mismo número.
U + 0 = U
Ejemplo 1:
6 + 0 = 6
Multiplicación:
(5)(1) = 5

4.- **Propiedad del Inverso.-** dice que la suma de la misma cantidad con signo opuesto, siempre dará cero, en el caso de la multiplicación, si se multiplica una cantidad por su inverso siempre dará la unidad
U + (- U) = 0
Ejemplo 1:
6 + (-6) = 0
Multiplicación:
(5)(1/5) = 1

5.- **Propiedad Distributiva.-** dice que…

Multiplicación sobre la suma:
u(v+w) = uv + uw
(u+v)w = uw + vw

Multiplicación sobre la resta:
u(v-w) = uv - uw
(u-v)w = uw – vw

6.- **Existencia del Inverso Aditivo.-** Si se considera un número “a”, entonces existe otro número real “-a”, tal que la suma de ellos es igual a cero. Como es:
a + (-a) = 0
Ejemplo:
7 + (-7) = 0
9 + (-9) = 0

7.- **Valor Absoluto de un número | |**.- Éste representa la distancia existente del origen de una recta numérica a cualquier punto de ella, por ejemplo; la distancia del número 5 al origen es de 5, y la distancia del número -5 al origen igualmente es de 5; por lo tanto, el valor absoluto de cualquier número sea positivo o negativo, su valor siempre será positivo.
Ejemplos:
|-6 |= 6
|3 |= 3
| -17|= 17

Signos de agrupación

Con frecuencia las operaciones de sumas y restas se combinan en un mismo problema; estas combinaciones se construyen con la ayuda de símbolos o signos de agrupación. Estos símbolos que se utilizan para asociar o agrupar conjuntos de números relacionados por medio de una o varias operaciones aritméticas.
Los signos de agrupación que se utilizan en el álgebra son:

- Paréntesis ( )
- Corchetes [ ]
- Llaves { }

Cuando una operación se encierra entre signos de agrupación, esto nos indica que dicha operación deberá efectuarse primero (de esta forma desaparece el signo de agrupación) y después realizar las otras operaciones indicadas con el resultado obtenido, por ejemplo:
15 + (12 – 3) =

(13 - 8) – (15 + 3) + (4 + 2) =

Signos de agrupación

Cuando uno o más signos de agrupación se encuentran encerrados dentro de otro, las operaciones deben de efectuarse de adentro hacia fuera, eliminando de uno en uno cada signo de agrupación; por ejemplo:

6 + {15 + [5 + (6 + 3) – (8 – 2)] } -1 =

Multiplicación de números reales

La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados los números llamados **factores**, encontrar un número llamado **producto**.
Si ***a*** y ***b*** representan números reales, entonces el producto de ***a*** y ***b*** se pueden representar de cualquiera de las siguientes formas:
ab
a · b
a (b)
(a) (b)
a x b (esta representación generalmente no se utiliza en algebra)

Propiedades de la multiplicación

- **Ley de la uniformidad o unicidad**.- El producto de una operación tiene valor único, por ejemplo:

5 (4) = 20 y no puede ser otro valor.

- Propiedad Conmutativa.- Esta propiedad establece que el orden de los factores no altera su producto, por ejemplo:

a · b = b · a
(6)(4)= (4)(6)

- **Propiedad Asociativa**.- Si tenemos el producto de tres números, por ejemplo 2, 9 y 4, primero se puede multiplicar 2(9) y el resultado multiplicarlo por 4, o bien multiplicar inicialmente 9(4) y el resultado multiplicarlo por 2; es decir:

2 · 9 · 4 = 72
(2 · 9) · 4 = 72
18 · 4 = 72

De acuerdo a loa anterior, se puede observar que no se está cambiando el orden de los factores, sino la forma de agrupación. En general, la propiedad asociativa de la multiplicación señala que si ***a, b*** y **c** son tres números reales, entonces ***abc = (ab)c = a (bc)***

- **Elemento neutro de la multiplicación**.- El elemento neutro de la multiplicación es el número **1**; porque el producto de todo número multiplicado por **1** es igual a dicho número.

$$1(a) = a$$
$$1(6) = 6$$
$$(1)(-8) = -8$$
$$1(-1/2) = -\tfrac{1}{2}$$

- **Inverso multiplicativo**.- Para todo número real a distinto de cero, existe un numero ***b***, también real, tal que ***a · b*** sea igual a ***1***.

El número ***b*** no es otro que **1/a**, y se le llama inverso multiplicativo de ***a***.
Los números ***a*** y $\mathbf{1/a}$ son inversos multiplicativos uno con respecto al otro.

Ejemplo:

El inverso multiplicativo de:	es	porque
7	1/7	7 · 1/7 = 1
9	1/9	9(1/9) = 1
1/4	4	(1/4)4 = 1
1/5	5	(1/5)5 = 1
2/5	5/2	2/5 · 5/2 = 1
-7/4	- 4/7	-7/4 · - 4/7 = 1

- **Propiedad distributiva de la adición**.- Si ***a,b*** y ***c*** son números reales cualesquiera, entonces ***a(b+c) = ab + ac***

Cuando se tienen más de dos números dentro del paréntesis se tienen que:
a(b+c+d+…..n) = ab + ac + ad+ ….+ an

Ejemplo:

8(5+3)= 8(5) + 8(3) = 40 + 24 = 64
4(7+2+1) =
3(4+6+2+3) =
5(3+8+6+1+7) =

- **Propiedad distributiva en resta**.- Si ***a,b*** y ***c*** son números reales cualesquiera, entonces ***a(b-c) = ab +-ac, o a(-b-c) = -ab +-ac***

Cuando se tienen más de dos números dentro del paréntesis se tienen que:
a(b-c-d-…..n) = ab - ac – ad- ….- an

Ejemplo:

8(5-3) = 8(5) - 8(3) = 40 - 24 = 16
8(-5-3)= -8(5) - 8(3) = -40 - 24 = -64
4(-7-2+1) =
3(4-6+2-3) =
5(-3-8-6+1+7) =

- **Propiedad multiplicativa del cero**.- Si se multiplica cualquier número real por cero, entonces su producto es igual a cero.

0(a) = 0
1(0) = 0
(0)(-8) = 0
0(-1/2) = 0
0(-7m) = 0
0(9x) = 0
-1/3y(0) = 0

Reglas de los signos en la multiplicación

1.- Si se multiplican <u>dos números reales</u> de **igual signo**, entonces el producto es un número real **positivo**.
2.- Si se multiplican <u>dos números reales</u> de **signo diferente**, entonces el producto es un número real **negativo.**
3.- De las reglas anteriores se deduce que cuando se multiplican más de dos números el producto será:

a) **Positivo** <u>si existe un número</u> **par** de factores negativos
b) **Negativo** <u>si existe un número</u> **impar** de factores negativos.

(+)Por (+) da (+)
(+)Por (-) da (-)
(-) por (+) da (-)
(-) por (-) da (+)

Ejemplos:

8 (4) = 32
(- 4) (- 6) = 24
8 (- 5) = - 40
5 (- 4) (- 2) = 40
(- 6) (- 2) (- 1) = - 12
(- 3) (- 2) (- 5) (- 4) (- 1) = - 120

Ejercicios:

4 (6) = ________
(- 5) (-97) = ____________
9 (- 4) = ____________
3 (- 5) (- 8) = __________
(- 8) (- 5) (- 3) = ______________

División de números reales

La división es la operación inversa de la multiplicación y permite, dado el producto de dos factores (llamado **dividendo**) y uno de los factores (llamado **divisor**), encontrar el otro factor, al cual se le llama **cociente**.

La división se denota por el signo entre (   ) o una línea horizontal o inclinada (/) colocada entre el dividendo y el divisor:

Si se divide 36 (dividendo) entre 4 (divisor) = 36/4 el resultado (cociente) es 9, porque 9 (4) = 36

15/3 = 5 porque 5(3)= 15
40/8 = 5 porque 5(8)=40
8/0 = <u>No tiene solución</u>
En efecto, no es posible realizar la operación 8/0 porque no existe ningún número real que multiplicado por cero sea igual a 8. Es decir, **la división entre cero no está definida.**

Propiedades de la división

- **Ley de la uniformidad o unicidad**.- El cociente de dos números reales tiene valor único, por ejemplo:

  8/2 = 4 y no puede ser otro valor.

- **Propiedad distributiva de la división con respecto a la suma**.-

  $$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c};\ \text{donde } c \text{ es diferente de cero}$$

- **Propiedad distributiva de la división con respecto a la resta**.-

  $$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c};\ \text{donde } c \text{ es diferente de cero}$$

- **Regla de los signos**.- Si se dividen dos números reales **de igual signo**, el cociente tendrá signo **positivo**; mientras que si tienen **signo contrario** el resultado será **negativo**.

(+) entre (+) da (+)
(+) entre (-) da (-)
(-) entre (+) da (-)

Ejercicios de operaciones con números reales

10 – 2 = ______

-3 -7 = ____

-5 + 2 = ______

3+ (4+5) = ______

5+ (2-7) = ______

-7 + (-2-9) = ______

1- 7 (-6+9) = ______

-10 + (8+7) = ______

-10/5(-2)= ______

1/2 + 3/4

3/5 – 7/8 =

3/7 + 5/3 - 2/7 =

3/2 + 2/3 + -1/4=

2/3*3/5 =

-7-(3-14) =

-6-3(-7+8)=

-10-(-2)=

-9+2(8+7)=

-6/(-2+6)=

-10/-3(-1-7)=

8(-2)=

(-7)(-4)= ______

Ejercicios de operaciones con números reales

-9(+2)= ______

(-9) 6= ______

(1) –(-11)= ______

(20)+(-7)= ______

-5-(10)=______

(-3)-(-2)=______

8 (1/8) = __________

(7/4 + 5/-3) - (2/6 – 1)=

$$\frac{7/5+3/2}{1+5/3 * 6/15} =$$

$$\frac{2-(1/2+3/-5)}{2+[3-(2+5)]} +1 =$$

$$\frac{3-(2+1/3)}{-1-2/4 * 6/3} =$$

3/8 [1 – 2 (1/3 - 2/ -6)] =

LEYES DE LOS EXPONENTES

1) Multiplicación de potencias con una misma base

$a^m a^n = a^{m+n}$

Se multiplican dos potencias a^m por a^n que tienen la misma base a.

El resultado es la base a cuyo exponente es la suma de sus exponentes $^{m} + ^{n}$.

Ejemplo: $(5^3)\ (5^2)\ (5^5)\ (5^8) = (5^{18})$

2) Potencia de potencia

$(a^m)^n = a^{mn}$

Ejemplos: $(a^3 4^2)^5 = a^{3\times5} 4^{2\times5} = a^{15} 4^{10}$

3) Potencia negativa

$a^{-n} = 1/a^n$ siempre que $a \neq \varnothing$

4) Potencia cero

$a^0 = 1$

5) Potencia de un fracción

$(a/b)^n = a^n/b^n$

Ejemplo: $(a^5/c^2)^8 = (a^{5\times8}/c^{2\times8}) = (a^{40}/c^{16})$.

6) División de potencias con una misma base

$a^m/a^n = a^{m-n}$

Ejemplo: $(m^6/m^2) = m^{6-2} = m^4$.

Ejercicios aplicando las leyes de los exponentes.

$2^3 =$
$(-2)^3 =$
$7^2 7^0 =$
$2^0\ (5)^2 =$
$2\ (2^5) =$
$5^0\ (3^0) =$
$(2)^3 =$
$3^4 =$
$(-3)^4 =$
$(-3)^3 =$
$(-5)^2 =$
$(-3)^2 - (-2)^3 =$

$3\ (5^2)\ 2^0 =$
$(5^4)^0 =$
$7^4/7^2 =$

$8^7/8^4 =$

$(3^2)^3 =$
$32\ (4^{-2}) =$

$125\ (5^{-3}) =$

$18(6^{-1}) =$

$3^2 3^3 =$
$2^9/2^7 =$

$5^5/5^7 =$
$3^2\ (3^3) =$
$w^4 w^6 =$
$w^7 w^{-2} =$
$m^{-4} m^{-2} =$
$-(5)^2 =$
$-(-3)^2 =$
$(-3)^2 =$
$(-1)^{105} =$
$(1)^{640} =$
$(567)^0 =$
$(-8 +16/2)^{45} =$
$(m^6\ n^4 p^3)^2 =$
$x^{12}\ y^5 z^3/\ x^{12}\ y^2 z$
$m^{10}\ n^8/\ m^7\ n^3$

Radicación con números reales (√)

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación y permite, conociendo la potencia y el exponente hallar la base correspondiente.
Como $\mathbf{6^2 = 36}$, se dice que 6 es la raíz cuadrada de 36 y se denota por $\mathbf{\sqrt{36} = 6}$.
Como $\mathbf{2^3 = 8}$, entonces se puede decir que 2 es la raíz cúbica de 8 y se denota como $\mathbf{\sqrt[3]{8} = 2}$.
Si tenemos que $\mathbf{3^4 = 81}$, entonces 3 es la raíz cuarta de 81 y se representa como $\mathbf{\sqrt[4]{81} = 3}$.
El signo $\sqrt[n]{\ }$ se llama **radical**, el número o expresión que se encuentra dentro del radical se llama **radicando** y, por último, el numero ***n***, el cual es un número natural, se llama **índice del radical**. Las raíces cuadradas tienen índice 2 y, por lo general, **éste no se escribe**.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{27}$**:** radicando, **27;** índice, **3 (**Se lee **"raíz cúbica de 27")**
$\sqrt{49}$**:** radicando, **49;** índice, **2 (**Se lee **"raíz cuadrada de 49")**

Nota: Las raíces para radicandos negativos cuando el índice del radical es par no existen para los números reales, por lo que sus resultados son imaginarios.

Ejemplo:

$\sqrt{-16}$ **=** No está definida para el conjunto de los números reales.

$\sqrt[4]{-81}$ **=** No está definida para el conjunto de los números reales.

Sin embargo; para los índices impares, si se pueden obtener raíces de radicandos negativos.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{-8} = -2$
$\sqrt[5]{-64} = -4$

Ejercicios:

$\sqrt[2]{25} =$
$\sqrt[2]{-49} =$
$\sqrt[4]{256} =$
$\sqrt[3]{125} =$
$\sqrt[3]{216} =$
$\sqrt[7]{-128} =$

Exponentes racionales

Una expresión radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ se puede escribir como una expresión exponencial utilizando la siguiente propiedad:

$$(a^{1/n})^m = a^{m/n}$$

Ejemplos:

$2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$
$16^{1/2} = \sqrt{16}$
$a^{1/2} = \sqrt{a}$
$x^{5/9} = \sqrt[9]{x^5}$
$8^{2/3} =$
$27^{1/3} =$
$b^{3/4} =$
$m^{2/5} =$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica consiste en expresar números grandes o muy pequeños con la ayuda de la potencia de base 10.
Cuando un número se escribe en notación científica aparece como un número mayor o igual que 1, pero menor que 10 multiplicado por alguna potencia base 10.

Por ejemplo:
4.6×10^4 **3.9×10^{-5}** **10^7**

Caso 1. El número dado es mayor que 1

En este caso se mueve el punto decimal hacia la izquierda y se marca a la derecha el primer dígito diferente de cero. A continuación se multiplica por una potencia de base 10 con exponente igual al número de lugares en los que se haya movido el punto decimal.

Ejemplo:

$418\,000\,000 = 4.18 \times 10^8$
$345\,000 = 3.45 \times 10^5$
$64\,800\,000\,000 = 6.48 \times 10^{10}$

Caso 2. El número dado es menor que 1

En este caso se mueve el punto decimal hacia la derecha y se marca a la derecha el primer dígito diferente de cero. A continuación se multiplica por una potencia de base 10 con exponente igual al número de lugares en los que se haya movido el punto decimal, pero con signo negativo.

Ejemplo:

$0.000057 = 5.7 \times 10^{-5}$
$0.0078 = 7.8 \times 10^{-3}$
$0.0000000065 = 6.5 \times 10^{-9}$
$0.42581 = 4.2581 \times 10^{-1}$

Operaciones básicas con notación científica

Suma y resta.

Para poder sumar y/o restar cantidades en notación científica o con base 10, es necesario que la potencia de la base 10 sean iguales en las cantidades, de no ser así tendremos que ajustarlas.

Por ejemplo:
$(3.45 \times 10^5)+(8.67 \times 10^5) =$
$3.45 + 8.67 = \underline{12.12 \times 10^5}$

$(3.45 \times 10^5)-(8.67 \times 10^5) =$
$3.45 - 8.67 = \underline{-5.22 \times 10^5}$

Si la base 10 no esta elevada a la misma potencia, es necesario recorrer el punto de una de las dos base 10, para igualarlas.

Por ejemplo:
$(3.45 \times 10^{\mathbf{2}})+(8.67 \times 10^{\mathbf{3}}) =$

Para igualar $3.45 \times \underline{10^2}$ a $\underline{\mathbf{10^3}}$ recorreré el punto a la izquierda de **<u>3.45</u>** y quedará 0.345, entonces tendré: $(0.345 \times 10^{\mathbf{3}})+(8.67 \times 10^{\mathbf{3}})$, de esta forma las bases 10 tendrán la misma potencia y se podrá efectuar la suma.

Nota: en este caso se tomó la cantidad de $3.45 \times 10^{\mathbf{2}}$**,** pero podría ser cualquiera de las dos cantidades (3.45×10^2) o (8.67×10^3), solo variaría el punto hacia donde se tenga que recorrer.

Ejercicios de sumas y restas

$(3.45 \times 10^{3}) + (8.67 \times 10^{3}) =$

$(6.48 \times 10^{4}) - (8.67 \times 10^{4}) =$

$(6.48 \times 10^{3}) + (3.45 \times 10^{2}) =$

$(6.48 \times 10^{4}) - (4.18 \times 10^{3}) =$

Multiplicación.

Para multiplicar cantidades en notación científica o con base 10, es más sencillo que las sumas y las restas, porque NO es necesario que la potencia de la base 10 sean iguales en las cantidades; solo hay que multiplicar las cantidades y posteriormente se suman las potencias de la base 10.

Por ejemplo:

$(3.4 \times 10^{5})(8.5 \times 10^{7}) =$
$(3.4)(8.5) = 28.9$
$(10^{5+7}) = 10^{12}$
Resp= $\underline{28.9 \times 10^{12}}$

$(7.4 \times 10^{5})(1.5 \times 10^{-3}) =$
$(7.4)(1.5) = 11.1$
$(10^{5+(-3)}) = 10^{2}$
Resp= $\underline{11.1 \times 10^{2}}$

Ejercicios de multiplicación:

$(3.45 \times 10^{2})(8.67 \times 10^{3}) =$

$(6.48 \times 10^{4})(8.67 \times 10^{3}) =$

$(6.48 \times 10^{4})(3.45 \times 10^{-2}) =$

$(6.48 \times 10^{-4})(4.18 \times 10^{3}) =$

División.

Al igual que en la multiplicación, para dividir cantidades en notación científica o con base 10, NO es necesario que la potencia de la base 10 sean iguales en las cantidades; solo hay que dividir las cantidades y posteriormente se restan las potencias de la base 10.

Por ejemplo:

$\underline{(16 \times 10^{5})} =$
(2×10^{2})
$(16)/(2) = 8$
$(10^{5-2}) = 10^{3}$
Resp= $\underline{8 \times 10^{3}}$

$(-9 \times 10^{5}) / (3 \times 10^{-2}) =$
$(-9)/(3) = -3$
$(10^{5-(-2)}) = 10^{7}$
Resp= $\underline{-3 \times 10^{7}}$

Ejercicios y Problemas de Aritmética

1.- Escribe los siguientes números en forma exponencial.

$\sqrt{5} =$
$\sqrt{7} =$
$\sqrt[3]{8} =$
$\sqrt[4]{25} =$
$\sqrt{4^3} =$
$\sqrt[3]{27} =$
$\sqrt[3]{2^5} =$
$\sqrt[5]{3^2} =$

2.- Escribe los siguientes números en forma radical.

$4^{1/2} =$
$64^{1/3} =$
$10^{3/5} =$
$32^{1/5} =$
$7^{3/4} =$
$14^{3/2} =$
$2^{5/4} =$
$16^{1/2} =$

3.- Efectúa las siguientes expresiones.

$\sqrt{81} – 3^3 – 6^0 =$
$\sqrt{64} + (-3)^2 – (6)^2 =$
$\sqrt{36} – 2^3 – 10^0 =$
$\sqrt[3]{8} - 4^2 – (2)^0 =$
$\sqrt[3]{27} - (-5) + (-6) =$

3.- Efectúa las siguientes expresiones.

$49^{1/2} + (-10) - (5) =$
$64^{1/3} - 81^{1/2} =$
$25^{1/2} - 27^{1/3} - (-2) + (-1) =$
$4^{1/2} - 64^{1/3} + 125^{1/2} - 64^{1/2} =$
$8^{2/3} + (-8)^{1/3} + 8^0 =$
$(-8)^{1/3} + 36^{1/2} - (-2) =$

4.- Expresa los siguientes números en notación científica.

346 =	0.0027 =	3 500 000 =	0.23 =
0.0025 =	0.452 =	0.00065 =	0.00000085 =
0.0000462 =	12 500 000 =	462 000 000 =	1, 968 000 000 =
38 000 =	48 000 000 =	4 900 =	0.000549 =

5.- Efectúa las siguientes operaciones de notación científica.

$(9 \times 10^{2})(4 \times 10^{4}) =$	$(5 \times 10^{-2})(6 \times 10^{3}) =$	$(4 \times 10^{3})(7 \times 10^{-6}) =$
$(8 \times 10^{3})^{2} =$	$(3 \times 10^{2})+(6 \times 10^{3}) =$	$(5 \times 10^{2})-(8 \times 10^{3}) =$
$(3.45 \times 10^{3})(7.39 \times 10^{3}) =$	$(6 \times 10^{3})^{2} =$	$(64 \times 10^{2})/(8 \times 10^{-8}) =$
$(81 \times 10^{2})/(9 \times 10^{-6}) =$	$(9 \times 10^{6})(8 \times 10^{3}) =$	$(3 \times 10^{2})+(8 \times 10^{2}) =$
$(3.45 \times 10^{2})(8.67 \times 10^{3}) =$	$(3.45 \times 10^{2})(8.67 \times 10^{3}) =$	$(5 \times 10^{4})+(4 \times 10^{3}) =$
$\frac{(3 \times 10^{3})+(3 \times 10^{3})}{(3 \times 10^{3})^{2}} =$	$\frac{(5 \times 10^{-2})(3 \times 10^{3})}{(3 \times 10^{2})+(1 \times 10^{2})} =$	$\frac{(32 \times 10^{3})-(4 \times 10^{3})}{(4 \times 10^{3})(7 \times 10^{-6})} =$
$\frac{(8 \times 10^{3})-(3 \times 10^{3})}{(6 \times 10^{3})(4 \times 10^{-6})} =$	$\frac{(3 \times 10^{4})+(6 \times 10^{3})}{(6 \times 10^{3})^{2}} =$	$\frac{(2 \times 10^{-2})(6 \times 10^{5})}{(3 \times 10^{3})+(2 \times 10^{3})} =$

6.- Resuelve los siguientes problemas.

Calcula el área y perímetro de un rectángulo, si uno de sus lados tiene una longitud de 11.5 cms. y el otro mide 23.67 cms.

Calcula el área de un triángulo cuya base y altura mide 16.8 Cm y 13.5 Cm

Calcula el área y perímetro de un cuadrado, si cada lado tiene una longitud de 8.5 m.

6.- Resuelve los siguientes problemas.

Luis pesó 90 kg, pero se está sometiendo a una dieta que le permitirá bajar 2Kg por mes, ¿Cuál será su peso a las 7 semanas?

Se quiere cercar un terreno rectangular colocando un poste cada 8 metros. Si las medidas del terreno son 1, 723,200 mts. ¿Cuántos postes necesitan?

Un tanque de gasolina se vacía a razón de 25l/m. Si tarda 40 min en vaciarse ¿Cuánto le cabe al tanque?

Un submarino sumergido a 280 metros bajo el nivel del mar disparó un cohete que avanzó 700 m verticalmente.

a) ¿A qué altura llegó el cohete sobre el nivel del mar?

b) Si el cohete necesita 3 litros de gasolina para avanzar 100 metros bajo el nivel del mar y 1.5 litros de gasolina para avanzar 100 metros sobre el nivel del mar, ¿Cuánta gasolina necesita?

c) ¿Cuánta necesitará si lanzan el cohete desde 500 metros bajo el nivel del mar y llega a la misma altura?

d) Si la gasolina la venden en frascos de 5 litros, ¿Cuántos frascos necesitan si lanzaran el cohete desde 280 metros bajo el nivel del mar?

e) Si lanzan el cohete al nivel del mar, ¿Cuánto avanza con la misma gasolina?

6.- Resuelve los siguientes problemas.

Si tengo un automóvil de $76,000...

a) ¿Cuánto voy a ganarle si lo vendo a $88,175?

b) Si debo pagar un impuesto de 21% sobre el precio original, ¿A cuánto debo venderlo si todavía quiero ganar $10,000?

c) Si las placas cuestan 12% del precio original, ¿Cuánto cuestan?

d) Si el carro se vende en $111,080 pesos, y el comprador lo revende 8% más barato, ¿A cuánto lo vendió?

Si cada pluma cuesta $8.50…

a) ¿Cuánto cuesta una caja con 16 docenas?

b) Si al comprar una membresía, recibes un descuento de 25% cada 10 docenas, ¿Cuánto cuestan 20 docenas?

c) Si en otra tienda te dan un descuento de 25% por todo…¿Cuánto cuestan las 20 docenas?

d) ¿Cuánto cuesta cada pluma en la primera tienda?

e) ¿Cuánto ahorras con el descuento?

6.- Resuelve los siguientes problemas.

Si vendo una computadora a 10,800 pesos…

a) ¿Cuál era su precio original si hubo una pérdida de $1,500?

b) ¿A qué porcentaje equivale?

Después de gastar $856 me quedaron $3743…

a) ¿Cuánto tenía inicialmente?

b) ¿A qué porcentaje equivale?

Los alumnos de matemáticas sacaron las siguientes calificaciones: 89, 58, 75, 40, 69, 98, 94, 80, 82, 100, 79, 90, 91, 88 y 56

a) ¿Cuál es el promedio del grupo?

b) Si es la calificación de un parcial, ¿Cuánto necesita el último en los siguientes dos parciales para tener 83 en el semestre?

Si en una tienda compraron 20 lap-tops iguales y el total por todas fueron $215,350…

a) ¿Cuánto cuesta cada una?

b) Si la tienda le aumenta 25% a cada una, ¿Cuál es el nuevo precio?

c) Después de 40 semanas solo se venden 4, por los que le descontaron 63%, ¿Cuánto cuestan ahora?

ALGEBRA.

El álgebra es una rama de la matemática en la que se usa para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética. Las operaciones de algebra son: adición (suma), diferencia (resta), producto (multiplicación), cociente (división) y cálculo de raíces.

En el Álgebra:

- Los NÚMEROS se emplean para representar cantidades conocidas y bien determinadas.

- Las LETRAS se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

- Las *cantidades conocidas* se expresan por las primeras letras del alfabeto: *a, b, c, d…*

- Las *cantidades desconocidas* se representan por las últimas letras del alfabeto: *u, v, w, x, y, z.*

Término algebraico.- es una expresión compuesta por números concretos y letras y también representan números relacionados entre sí mediante las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.

Elementos de un término

Los elementos de un término son:

- *El signo*
- *El coeficiente numérico*
- *La parte literal*

$$-3x^2$$

El signo puede ser negativo o positivo, y este siempre va a existir en un término algebraico, este representado físicamente o no; es decir, si no está escrito se sobre entiende que es positivo.

El Grado de un término algebraico es la suma de los exponentes de sus factores literales. Por ejemplo:

$9a$. Es de primer grado
$-6x^2y$. Es de tercer grado
$2x^4y^3$. Es de séptimo grado
m^2y^2. Es de cuarto grado

Transformación del lenguaje común a algebraico.

El álgebra es de gran utilidad para resolver problemas de nuestra vida cotidiana y eso lo podemos hacer mediante la conversión del lenguaje común o tradicional, a términos algebraicos por ejemplo:

- El doble de un número: $2x$.
- La diferencia de dos números: $a-b$.
- La raíz cuadrada de un número: $\sqrt{x}$.
- El triple del cubo de un número: $3x^3$.
- El producto de dos números disminuido en cuatro: $(a)(b)-4$.
- El cociente de dos números diferentes adicionado en tres: $a/b+3$.
- La mitad de un número: $1/2x$.
- El triple del cuadrado de una número más la tercera parte del mismo número: $3x^2 + 1/2x$.

Ejercicios

- **$3x$:**
- **ab^2:**
- **$a+b$:**.
- **$n-m$:**
- **x^3+y^3:**
- **$3(x+y)$:**
- **$1/3x^2$:**
- **$(a.b)^2$:**

Propiedades de la Igualdad

El signo de igualdad "**=**" denota la relación de identidad. De este modo la expresión ***m=n*** nos indica que los símbolos ***m*** y ***n*** representan un mismo número.

Si consideramos que ***m, n*** y ***p*** son números reales; las propiedades de la igualdad serían las siguientes:

1.- Propiedad reflexiva

$$m = n$$

2.- Propiedad simétrica

Si ***m = n***, entonces ***n = m***

Ejemplo:

Si ***12 = 6x***, entonces ***6x = 12***

3.- Propiedad transitiva

Si ***m = n*** y ***n = p***, entonces ***m = p***

Ejemplo:

Si ***6x + 5 = b*** y ***b= 2x -*** 7, entonces ***6x + 5 = 2x – 7***

4.- Propiedad aditiva

Si ***m = n***, entonces ***m + p = n + p***

Ejemplo:

a) Si ***6x - 3 = 9***, entonces ***6x – 3 + 3 = 9 + 3,*** de donde resulta ***6x = 12***

b) Si ***5x + 6 = 11***, entonces ***5x + 6 + (-6) = 11 + (-6),*** resulta ***5x = 5***

5.- Propiedad multiplicativa

Si ***m = n***, entonces ***mp = np,*** para todo ***p*** diferente de ***cero***

Ejemplo:

a) Si **x/4 = 5**, entonces **(x/4)4 = 5(4**), de donde resulta ***x = 20***

b) Si ***8x = 16***, entonces ***(8x)1/8 = 16(1/8),*** de donde resulta ***x = 2***

Ejercicios de propiedades de la igualdad:

1.- Si x + 6 = 18, entonces x= ________

2.- Si y – 4 = 12, entonces y = ________

3.- Si 8 – b = 6, entonces b = _______

4.- Si 5x = 35, entonces x = ______

Ejercicios de propiedades de la igualdad:

5.- Si -8y = 40, entonces y = ______

6.- Si x/4 = 2, entonces x = ______

7.- Si y - 17 =25, entonces y = ______

8.- Si m - 9 = -2, entonces m = ______

9.- Si x + 5 = -10, entonces x = ______

10.- Si -7y = - 63, entonces y = ______

Problemas

1.- Si se dispone de 60 litros de agua purificada ¿cuantas botellas se pueden llenar si la capacidad de cada una de ellas es de 3/5 de litro?

1botella________3/5 Lts
X botellas ________60 L

(1)(60)= (X)(3/5)
60 =3X/5
(60)(5)=3X
300=3X
300/3=X
100=X

Entonces se puede llenar **100 Botellas**

Problemas

Problemas

2.- Un albañil pinta una pared con una rapidez de 7 3/4 m^2 por hora y otro a razón de 6 3/5 m^2 por hora. ¿Cuantos metros cuadrados de superficie pintan entre los dos, en dos horas?

Albañil 1=2 h. (7 3/4 m^2/h)=14 6/4 m^2=14 3/2 m^3=15 1/2 m^2

Albañil 2=2 h. (6 3/5 m^2/h)=12 6/5 m^2=13 1/5 m^2.

Sumando lo que han pintado los dos albañiles:

Albañil 1 + albañil 2= (15 1/2) m^2 + (13 1/5 m^2)=28 7/10 m^2.

Sol: **28 7/10 m^2. = 28.7 m^2**

3.- Un caminante recorre 2 1/3 km durante la primera hora, 3 ½ km durante la segunda y 2 2/5 en la tercera. ¿Cuántos kilómetros recorrió en las 3 horas?

$$2\frac{1}{3} = \frac{(3*2)+1}{3} = \frac{7}{3}$$ primera hora.

$$3\frac{1}{2} = \frac{(3*2)+1}{2} = \frac{7}{2}$$ segunda hora.

$$2\frac{2}{5} = \frac{(2*5)+2}{5} = \frac{12}{5}$$ tercera hora

$$\frac{7}{3} + \frac{7}{2} + \frac{12}{5} = \frac{(10*7) + (15*7) + (6*12)}{30} = \frac{70 + 105 + 72}{30}$$

$$= \frac{247}{30}$$ = 8,23 kilómetros.

4.- Una persona gasta 1 /5 de su sueldo en el pago de la renta de su vivienda, 3/7 en alimentos, 1/3 en gastos diversos y el resto lo ahorra. Si gana $ 21, 000 pesos mensuales, ¿Cuánto ahorra por año?

5.- De una pieza de tela de 60 mts, un comerciante vende 2/5 de ella y después ¾ del resto. ¿Cuántos metros de tela le quedan?

Términos semejantes

Son todos aquellos términos que tienen la misma parte literal sin importar el coeficiente ni el signo que posean; es decir, esto se centra únicamente en la parte literal y en el exponente que posean, estos deberán de ser iguales.

Por ejemplo son términos semejantes los siguientes términos:

$-6n^2$ y $\frac{1}{2} n^2$

$5x^2yz^4$ y $2x^2yz^4$

En ambos ejemplos es posible identificar que los dos términos poseen las mismas literales (sin importar el número de letras que posean) con igual exponente, por lo que consideramos que son términos semejantes.

Una expresión algebraica pueden tener uno o más términos en general (semejantes o no), los cuales pueden clasificarse como monomios, binomios, trinomios o polinomios, esto es de acuerdo al número de términos que forme mi expresión algebraica. Estos términos se encuentran separados por un signo (+) o (-).

Ejemplos:

Monomio $-14n^2$
Binomio $-8n-4n$
Trinomio $2x^2 -5xy +y^2$
Polinomio $4x^3 -8 +6x^2 -x -9x +2x -4x^2 -5 +x^3$

Ejercicios:
Reduzca las siguientes expresiones algebraicas

$7a + 2a =$

$-8n-4n+ 3n=$

$-6n^2-8n^2 + 4n^2 =$

$1/2x^3 + 1/4x^3=$

$3m^2 - 1/7m^2 =$

$5x^2 -12x^2 - 3y =$

$-15xy + 18xy + 8xy^2 =$

$-12ab^2 + 8ab^2=$

Ejercicios

Reduzca las siguientes expresiones algebraicas

$-8a +3a -6a +a =$

$-4ab^2 + 7ab^2 - ab^2 + 13ab^2 =$

$-1/2y^2 + 1/3y^2 + 1/2x^3 - 3/2y^2=$

$-1/2y^2 + 3y^2 + 5/2y^2=$

Suma de polinomios

Para efectuar la suma de dos o más polinomios se requiere reducir los términos semejantes existentes en ellos. Para llevar a cabo esta acción se pueden escribir los polinomios en renglones sucesivos de tal forma que los términos semejantes queden en una misma columna y a continuación se reducen los términos semejantes.

A continuación se desarrollan dos ejercicios como ejemplo:

Sea el polinomio: $4x^3 -8 +6x^2 -x^4 -9x;\ 2x -4x^2 -5 +x^3 -x^4;\ -5x^3 -2x^4 +19 +3x -x^2$

$$\begin{array}{l} -x^4 +4x^3 +6x^2 - 9x -8 \\ -x^4 + x^3 - 4x^2 +2x - 5 \\ -2^4 - 5x^3 - x^2 +3x +19 \\ \hline \mathbf{-4x^4 \quad + x^2 -4x +6} \end{array}$$

Sea el polinomio: $(2x^2 -5xy +y^2 -7)+ (-3y^2 –x^2 -7xy -1)+ (5x^2 –xy +6)$

$$\begin{array}{l} 2x^2 + y^2 \ -5xy – 7 \\ -x^2 -3y^2 \ -7xy - 1 \\ 5x^2 \qquad - xy + 6 \\ \hline \mathbf{6x^2 –2y^2 –13xy -2} \end{array}$$

Ejercicios de suma de polinomios:

$(-4x^4+x^2-4) + (5x^2-4) =$

$(- 3x^2 + 2x^4 - 8 - x^3 + 1/2\ x) + (-5x^4 - 10 + 3x + 7x^3) =$

$(-3x^2 + 5x - 4) + (4x^3 - 5x^2 + 2x + 1) =$

$(9 + 5x^3 - 4x^2 + x) + (4x^2 - 3 - 2x) =$

$(4x^3 + 5) + (-2x + x^2) =$

$(-3xy^2 + 4 - 7x^2y^2 - 6x^2y - 5xy) + (8xy - 2xy^2 + 10 + 4x^3y) =$

Resta de polinomios

Las restas de polinomios pueden resolverse de la misma forma que las sumas entre polinomios, solo que en este caso, se les cambia de signo a todos los términos del polinomio que se está restando y se procede a efectuar los mismos pasos de la suma.

A continuación se desarrollan dos ejercicios como ejemplo:

Sea el polinomio: $\boldsymbol{(10x^2 - 6x^4 + x - 10 - x^3) - (-10x^4 + 8x^3 - 7x - 4 + 5x^2)}$

Primero se le cambia de signo a todos los términos de: $\boldsymbol{-(-10x^4 + 8x^3 - 7x - 4 + 5x^2)}$ quedando de la siguiente forma: $\boldsymbol{10x^4 - 8x^3 + 7x + 4 - 5x^2}$

Posteriormente ya se pueden acomodar al igual que la suma o simplemente reducir los términos semejantes, como le sea más fácil y práctico para cada persona.

$$\begin{array}{l} -6x^4 - \quad x^3 + 10x^2 + x - 10 \\ \underline{10x^4 - 8x^3 - \quad 5x^2 + 7x + 4} \\ \mathbf{4x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 8x - 6} \end{array} \qquad \begin{array}{l} = 6x^4 + 10x^4 - x^3 - 8x^3 + 10x^2 - 5x^2 + x + 7x - 10 + 4 \\ = \underline{\mathbf{4x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 8x - 6}} \end{array}$$

Sea el polinomio: $\boldsymbol{(1/2x - 1/4y) - (1/4x - 3/8y)}$

Paso 1. Cambiar de signo a todos los términos de: $\boldsymbol{-(1/4x - 3/8y)}$
Quedando: $\boldsymbol{-1/4x + 3/8y}$

$$\begin{array}{l} 1/2x - 1/4y \\ -\underline{1/4x + 3/8y} \end{array}$$

Para **"x"**

$$\frac{1x}{2} - \frac{1x}{4} = \frac{2+1}{4} = \mathbf{3/4x}$$

Para "y"

$$\frac{-1y}{4} + \frac{3y}{8} = \frac{-2+3}{8} = \mathbf{1/8y}$$

Respuesta:

$$\boldsymbol{\frac{3x}{4} + \frac{1y}{8}}$$

Ejercicios de resta de polinomios:

$(-ab^2 + 8a^2b) - (2/5\ ab - 4/3\ a^2b)$

$(2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$(5x^2 - 2x + 4) - (-4x^3 + 9x^2 - 3)$

$(5x - 4 - 3x^2) - (2x + 4x^3 - + 1 + 5x^2)$

$(7x^4 + 4x^2 + 7x + 2) – (6x^3 + 8x +3)$

$(1/2\ x^2 + 4) - (3/2\ x^2 + 5) + (x^2 + 2)$

$(- 3x^2 + 9x^4 - 8 - 4x^3 + 1/2\ x) – (5x^4 - 10 + 3x + 7x^3)$

Multiplicación de polinomios

Las operaciones de multiplicación de polinomios, son distintas a las operaciones de sumas y restas entre expresiones algebraicas. En este tipo de operaciones se distinguen tres tipos y son:

a) Multiplicación de monomios.
b) Multiplicación de un monomio por un polinomio.
c) Multiplicación de polinomio por polinomio.

Reglas Básicas para Manejar los Exponentes

Regla:	Ejemplo:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(ab)^2 = a^2 b^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$
$(a^n b^m)^p = a^{np} b^{mp}$	$(a^2 b^3)^5 = a^{2 \cdot 5} b^{3 \cdot 5} = a^{10} b^{15}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$	$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
$a^0 = 1$	

Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos o más monomios se aplican las reglas de los signos de la multiplicación, las reglas de los exponentes y las características representativas de este tipo de operación.

Reglas o pasos para efectuar una multiplicación de moomios o expresiones algebraicas.

1.- Primero se multiplican los signos.
2.- Se multiplican los coeficientes numéricos.
3.- Se multiplican las literales o variables de cada monomio utilizando las leyes de los exponentes.

Ejemplos:

$(3x^2y)\ (7xy^4)= 21x^3y^5$

$(-6m^2n^4y)\ (-2mn^2y^4)= 12m^3n^6y^5$

$(-4w^2v)^2 = (-4w^2v)\ (-4w^2v)= 16w^4v^2$

$(-2a^3b^2c^5)^3= (-2a^3b^2c^5)\ (-2a^3b^2c^5)\ (-2a^3b^2c^5\ )= -8a^9\, b^6c^{15}$

Ejercicios:

$3x^3\ (4x^2) =$

$6x^2y\ (-3x^2y) =$

$(2x^3)(5xy^3z) =$

$(-4x^3y^2)\ -5xyz=$

$(-8a^3b)\ (ab^2c) =$

$3/2x^{1/2}\ (1/2x^2) =$

$(2/3m^2)(1/2m^{1/3}n^3p) =$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación; o sea, se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo 1:

$3x^2(2x^3 - 7x^2 - x + 6) =$

$6x^5 - 21x^4 - 3x^3 + 18x^2$

Ejemplo 2:

$-3a^2b\,(5a^3 - b^2 + 4) =$

$-15a^5b + 3a^2b^3 - 12a^2b$

Ejemplo 3:

$$8\left[\frac{x-5}{2} + \frac{x+3}{4} + \frac{x+1}{8}\right] =$$

$$\cancel{8}\left[\frac{4x - 20 + 2x + 6 - x - 1}{\cancel{8}}\right]$$

$= \underline{\mathbf{5x-15}}$

Ejercicios:

$3x^2\,(5x - 4x^3 + 3) =$

$(-2x^3)\,(2xy - 4x^2 + 5y^3 - 2) =$

$(2x^2 - 3xy^3 - x^2 + 4)\,(5xy) =$

$[3h]\,(-h^2 + 2h - 1) =$

$(4y^2 - 2y + 1)\,(-7y) =$

$$10\left[\frac{x-3}{5} + \frac{x+1}{2}\right] =$$

$$16\left[\frac{x-5}{8} - \frac{x+6}{2}\right] =$$

Multiplicación de polinomio por polinomio

Para multiplicar un polinomio por un polinomio se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación; o sea, se multiplica cada término del polinomio por cada término del otro polinomio; al finalizar si es posible reducir términos semejantes es necesario (obligatorio) hacerlo.

Ejemplo 1:

$(7x-5)\ (4x^3 -5x^2 -2x +3)=$

$$\begin{array}{r} 28x^4 - 35x^3 - 14x^2 + 21x \\ \underline{ - 20x^3 + 25x^2 + 10x - 15} \\ \mathbf{28x^4 - 55x^3 + 11x^2 + 31x - 15} \end{array}$$

Ejemplo 2:

$(2x-5)\ (4x^3 -7x^2 +2x -3)=$

$$\begin{array}{r} 8x^4 - 14x^3 + 4x^2 - 6x \\ \underline{ - 20x^3 + 35x^2 - 10x + 15} \\ \mathbf{8x^4 - 34x^3 + 39x^2 - 16x + 15} \end{array}$$

Ejercicios:

$(x+9)\ (x-2)=$

$(4x - 1)\ (9x - 2) =$

$(2x – 5y)^2 =$

$(3x – 2)^3 =$

$(3x-4)(x-3)(4x+1)=$

$(a^2 – 2ab + b^4)\ (a - b) =$

$(x^2 -3x +4)\ (2x-5)=$

$(a^2+5)\ (a^2 -2a +3)=$

Ejercicios de multiplicación de polinomio por polinomio

$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=$

$(-9x^2 + x + 5x^4)\ (3 - 2x^2) =$

$(a^2 +2a -1)\ (a^2 -2a +1)=$

$(3x – 6)\ (4x^3 - 5x^2 + 2x + 1) =$

$2x\ (7x – y)\ (6x – 4y) =$

$a – (2 – a\ [3a – 5\ (4a – 3) + a – 1] – 7(a + 2) – 3\} + 2 =$

$– \{3 + x(5-x) – [x(3x-5)]\} =$

$2(5x – y) – x + 5y + 2\ (x – y)\ (-2x + 3y) +2 =$

$2x – \{ 3x – y + 5\ [8x – (x + y – 1)]\} =$

$(1/2\ a^n\ x^3)(− 2/3\ a^2x)(− 3/5\ a^mx^2) =$

División de monomios

La división de monomios se efectúa en tres pasos y son los siguientes:

a) Primero se dividen los signos de acuerdo a las reglas.
b) Se dividen los coeficientes o se reducen de acuerdo al caso.
c) Posteriormente se restan los exponentes de las literales.
d) Acomodo de las variables de acuerdo al exponente obtenido después de la resta.

Ejemplo 1:

$$\frac{40x^2y^5c}{48x^3y^2c} =$$

Paso 1. Considerando que los signos tanto del numerador como del denominador son positivos, quedan igual.

Paso 2. Como los coeficientes no se pueden dividir, se procede a su reducción (en este caso se extrajo la mitad).

$$\frac{20}{24} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Paso 3. Restar los exponentes de las literales.

$$\underline{x^{2-3}\, y^{5-2}\, c^{1-1}} = \underline{x^{-1}\, y^{3}\, c^{0}}$$

Paso 4. Acomodo de las variables.

$$\frac{y^3}{x}$$

Nota: La variable "x" quedo con exponente negativo; por lo tanto, esa variable se coloca en la parte de abajo para que el exponente se convierta en positivo. La variable "c" su exponente fue cero y se elimina (no es necesario ponerla)

Resultado final: $\frac{5y^3}{6x}$

Ejemplo 2:

$$\frac{\mathbf{8a^9b^3c}}{\mathbf{-2a^6b^4}} =$$

Paso 1. El signo del numerador es positivo y el denominador es negativo; por lo tanto, el signo de la división será negativo.

(+) entre **(-) = (-)**

Paso 2. Como los coeficientes son divisibles y nos generan un número entero, se procede a su división.

8/4 = 2

Paso 3. Restar los exponentes de las literales.

$\underline{a^{9-6}\, b^{3-4}\, c^{1-0}} = \underline{a^{3}\, b^{-1}\, c^{1}}$

Paso 4. Acomodo de las variables.

$$\frac{a^3c}{b}$$

Resultado final:

$$\frac{\mathbf{-4a^3c}}{\mathbf{b}}$$

Ejercicios de división de monomios.

$$\frac{-10x^4y^3}{15x^4y^5} =$$

$$\frac{-21xb^5c^3}{-63x^3b^2c^3d} =$$

$$\frac{28a^5b^7c}{-21a^6b^8} =$$

$$\frac{-30m^2n^4x^2}{-45m^3n^7x^3} =$$

PRODUCTOS NOTABLES

Al multiplicar algunos tipos de expresiones se obtienen productos en los que se distinguen algunos rasgos notables, los cuales nos permiten efectuar dichas operaciones de forma más rápida al aplicar algunas reglas significativas. Dichos productos reciben el nombre de ***productos notables***.

Se les llama producto notable porque son invariables y en todo caso, quienes manejan las matemáticas no necesitan realizar las multiplicaciones para obtener esos productos.

Caso 1. Producto de dos binomios conjugados

Si se tiene el binomio $x + y$, entonces e dice que $x - y$ es su conjugado y viceversa.

Para efectuar la multiplicación de dos binomios conjugados se aplica la siguiente regla:

"El producto de un binomio conjugado es igual al cuadrado del pimero menos el cuadrado del segundo", donde consideraremos como primer término aquel que tiene signo positivo en ambos binomios; o sea, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Ejemplos:

$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

Comprobación: $x^2 - 7x + 7x - 49$

Resp $= x^2 - 49$

$(y + 6)(y - 6) = y^2 - 36$

Comprobación: $y^2 - 6y + 6y - 36$

Resp $= y^2 - 36$

$(3x + 4)(3x - 4) =$

Comprobación: $9x^2 - 12x + 12x - 16$

Resp $= 9x^2 - 16$

4.- $(9x + 5)(9x - 5) =$

$81x^2 - 45x + 45x - 25$

$R = 81x^2 - 25$

<u>NOTA:</u> Siempre que haya 2 binomios iguales y con signos contrarios solo se eleva al cuadrado y el signo será negativo.

Caso 2. Cuadrado de un binomio

El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

La fórmula representativa de esta operación es: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + c^2}$

Sin embargo si el binomio tiene signo negativo.

Su fórmula cambiaria y sería:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + c^2}$$

Ejemplos:

1.- $\mathbf{(n + 6)^2 = (n + 6)(n + 6)}$

$= n^2 + n^6 + n^6 + 36$
$= \underline{\mathbf{n^2 + 12n^2 + 36}}$

2.- $\mathbf{(y - 4)^2 = (y - 4)(y - 4)}$

$= y^2 - 4y - 4y + 16$
$= \underline{\mathbf{y^2 - 8y^2 + 16}}$

3.- $\mathbf{(3y + 2x)^2 = (3y + 2x)(3y + 2x)}$

$= (3y)^2 + 2(3y)(2x) + (2x)^2$
$= 9y^2 + 2(6xy) + 4x^2$
$= \underline{\mathbf{9y^2 + 12xy + 4x^2}}$

4.- $\mathbf{(8a - 3b)^2 = (8a - 3b)(8a - 3b)}$

$(8a)^2 - 2(8a)(3b) + (-3b)^2$
$= 16a^2 - 2(24ab) + (9b^2)$
$= \underline{\mathbf{16a^2 - 48ab + 9b^2}}$

Caso 3. El producto de dos binomios que tienen un término en común

El producto de dos binomios que tienen un término en común es igual al cuadrado del término común más el producto del término común por la suma de los no comunes, más el producto de los términos no comunes.

Fórmula: **$(x + a)(x – b) =$** $(x)^2 + x(a + b) + [(a)(b)] =$ **$\underline{x^2 + x(a + b) + ab}$**

Ejemplos:

$(n + 9)(n + 3) =$

$= n^2 + n(9 + 3) + (9)(3)$
$= n^2 + 9n + 3n + 27$
$= \underline{\mathbf{n^2 + 12n + 27}}$

$(y + 7)(y - 3) =$

$= y^2 + y[(7 + (-3)] + [(7)(-3)]$
$= y^2 + y(7 - 3) - 21$
$= y^2 + 7y – 3y - 27$
$= \underline{\mathbf{y^2 + 4y - 21}}$

$(a - 2)(a - 9) =$

$= a^2 + a[(-2 + (-9)] + [(-2)(-9)]$
$= a^2 + a(-2 - 9) + 18$
$= a^2 - 2a – 9a + 18$
$= \underline{\mathbf{a^2 - 11a + 18}}$

$(3b + 7)(3b + 2) =$

$= (3b)^2 + 3b(7 + 2) + (7)(2)$
$= 9b^2 + 21b + 6b + 14$
$= \underline{\mathbf{9b^2 + 27b + 14}}$

Caso 4. El cubo de un binomio

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término, más el triple producto del cuadrado del segundo término por el primer término, más el cubo del segundo término.

La fórmula representativa de esta operación es: $\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3}$

Sin embargo si el binomio tiene signo negativo.

Su fórmula cambiaria y sería:

$$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - c^3}$$

Ejemplos:

1.- $(y + 4)^3 =$

Sustituyendo términos en la fórmula:

$(y)^3 + 3(y)^2 (4) +3(y) (4)^2 + (4)^3$

Resultado: **$\underline{y^3 + 12y^2 +48y +64}$**

2.- $(3n + 5)^3 =$

Sustituyendo términos en la fórmula:

$(3n)^3 + 3(3n)^2 (5) + 3(3n) (5)^2 + (5)^3$

Resultado: **$\underline{27n^3 + 135n^2 +225n +125}$**

3.- $(4n - 1)^3 =$

Sustituyendo términos en la fórmula:

$(4n)^3 - 3(4n)^2 (1) + 3(4n) (1)^2 - (1)^3$

Resultado: **$\underline{64n^3 - 48n^2 +12n - 1}$**

4.- $(5b - 3)^3 =$

Sustituyendo términos en la fórmula:

$(5b)^3 - 3(5b)^2 (3) + 3(5b) (3)^2 - (3)^3$

Resultado: **$\underline{125b^3 - 225b^2 +135b - 27}$**

Ejercicios de productos notables

Ejercicio	Resultado	Caso al que pertenece
1- $(a - 5)(a + 5) =$		
2. - $(n - 5) =$		
3. - $(a - 9)(n + 5) =$		
4. - $(2b+7)(2a-7) =$		
5. - $(3a+b)^2 =$		
6. - $(b-1)(b-7) =$		
7. - $(7w-2a)(7w+2)$		
8. - $(1- a)^2 =$		
9.- $(y-3)^3 =$		
10.- $(y+8)(y-8) =$		
11.- $(7x+2y)^2 =$		
12.- $(2x+3)^3 =$		
13.- $(1-a)(1+a) =$		
14.- $(x+8)(x+3) =$		
15.- $(3x-5)^3 =$		
16.- $(a+6)^2 =$		
17.- $(y+9)(y-3) =$		
18.- $(1-4y)^3 =$		
19.- $(3x+5)(3x-5) =$		
20.- $(5a - 2b)^2 =$		
21.- $(n+2)^3$		

FACTORIZACIÓN

Factorizar una expresión algebraica es recibirla como el producto de dos factores y representarla en forma desarrollada pero en forma de multiplicación.
La factorización viene siendo algo así como lo contrario a los productos notables; es decir, como la inversa de ellos.

Por ejemplo:

$x^2 - y^2$, la cual se puede expresar como: **$(x + y)(x - y)$**

La multiplicación algebraica consiste en encontrar el producto de dos o más factores, esto consiste en encontrar el problema inverso; es decir, dado un producto determinaremos sus factores. Es importante tener presente que no todo polinomio se puede factorizar.

Existen diferentes tipos de factorización como son las siguientes.

Caso 1. Factorización de polinomios cuando sus términos tienen un monomio factor común.

Cuando cada uno de los términos de un polinomio tiene un factor común, la ley distributiva de la multiplicación nos permite expresarlo como el producto de dos factores, donde uno de ellos es el monomio factor común.

Ejemplos:

$2a + 2b =$

$\underline{2(a + b)}$

$ax - ay =$

$\underline{a(x - y)}$

$20ab^2 - 15a^3b =$

$\underline{5ab(4b - 3a^2)}$

$8a^2 - 32a^3 - 24a =$

$\underline{8a(a - 4a^2 - 3)}$

$16x^3y^2 - 24x^4y^2z - 40x^5y^3b =$

$\underline{8x^3y^2(2 - 3xz - 5x^2yb)}$

$15xy^3 - 35x^2y + 20x^3y^2 =$

$\underline{5xy(3y^2 - 7x - 4x^2y)}$

Ejercicios de factorización de polinomios cuando sus términos tienen un monomio factor común.

$m^5 – 2m^2 + 6m =$	$X^2 – 8x^3 - 7x^4 =$	$2x + x^2 =$
$25y^3 – 15y^2 + 10y =$	$35m^2n – 42m^4n^2 + 21m^3n^3 =$	$b^2 + 3b =$
$54x^2y^3 – 18xy^2 + 36ax^3y^5 =$	$ax + bx =$	$4x – 24y =$
$15xy^3 – 35x^2y + 20x^3y^2 =$	$2a – 8b =$	$6xy – 3\ y^2 =$
$56ax^5 – 14x^2y^2 - 28ax^3 =$	$8m^8 – 12m^4 =$	$a(x + 2) + b(x + 2) =$
$ax^2 – bx^2 + 6x^2 =$	$na – ma=$	$2(y - 3) - y(y - 3) =$
$5x(b - 6) - 4(b - 6) =$	$7a(a - b) + a – b =$	$a(n + 6) + n + 6 =$

Caso 2. Diferencia de cuadrados

Recordando que el multiplicar dos binomios conjugados, el producto que resulta es una diferencia de cuadrados; por lo tanto, toda expresión de este tipo puede expresarse inversamente como el producto de dos binomios conjugados.

Por ejemplo:

$$\mathbf{a^2 - b^3 = (a + b)\ (a - b)}$$

Esto es que si desarrollamos esta multiplicación: ***(a + b) (a - b),*** nos dará como resultado final: $\boldsymbol{a^2 - b^3}$

Una forma fácil de realizar este tipo de factorización es extrayendo la raíz cuadrada de cada uno de los términos del binomio, en dado caso de que alguno de los dos términos no tenga raíz cuadrada, entonces no se puede factorizar por este método.

Ejemplo 1:

Si tenemos el binomio: $\mathbf{x^2 - 9}$ =
Extraemos la raíz de cada término:

$$\sqrt{x^2} = x$$
$$\sqrt{9} = 3$$

Entonces la factorización del binomio sería, **(x + 3) (x – 3)**

Ejemplo 2:

Si tenemos el binomio: $\mathbf{25y^2 - 16}$ =
Extraemos la raíz de cada término:

$$\sqrt{25y^2} = 5y$$
$$\sqrt{16} = 4$$

Entonces la factorización del binomio sería, **(5y + 4) (5y – 4)**

Ejemplo 3:

Si tenemos el binomio: $\mathbf{4n^2 - 4m^2}$ =
Extraemos la raíz de cada término:

$$\sqrt{4n^2} = 2n$$
$$\sqrt{4m^2} = 2m$$

Entonces la factorización del binomio sería, **(2n + 2m) (2n – 2m)**

Ejemplo 3:

Si tenemos el binomio: $\mathbf{b^2 (y - 2) - 64(y - 2)}$ =
Extraemos la raíz de los términos cuadrados:

$$\sqrt{b^2} = b$$
$$\sqrt{64} = 8$$

Entonces la factorización del binomio sería, **(y - 2) (b + 8) (b - 8)**

Ejercicios de factorización por diferencia de cuadrados

$y^2 – 81 =$	$36x^2 – 1 =$	$ax^2 – 16a =$
$16 – y^2 =$	$64b^2 – 25 =$	$bx^2 – b =$
$b^2 – 1 =$	$16b^2 – 100y^2 =$	$64z^2 – 81 =$
$100 – w^2 =$	$y^2 – 4 =$	$36m^2 – 1 =$
$25 – 49y^2 =$	$25x^2 – 36 =$	$4 – 49a^2b^2 =$
$a^4 – 9 =$	$4a^2 – 1 =$	$y^6 – 16 =$
$x^2(x + 3) - y^2(x + 3) =$	$a^2(m -) - 4(m - n) =$	$b^2(x - y) - (x - y) =$
$a^2(a^2 - 1) - 9(a^2 - 1) =$	$m^2(1 - x) - y^2(1 - x) =$	$a^3 + a =$

Caso 3. Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio es cuadrado perfecto, cuando es producto de elevar un binomio al cuadrado. De esta forma, el trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ es perfecto porque resulta de elevar el binomio $a + b$ al cuadrado, es decir:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuando se requiere factorizar un trinomio cuadrático es recomendado verificar si se trata de un cuadrado perfecto. Para hacer esto es importante tener presente las siguientes características:

1.- Si el trinomio cuanta con dos factores que se les puede obtener una raíz perfecta.
2.- Si el tercer factor es el doble de los productos de los dos factores a los cuales se les obtuvo su raíz.

Ejemplo 1:

Si tenemos la siguiente expresión: $4x^2 + 20xy + 25y^2$

Verificando los factores cuadráticos:

$$\sqrt{4x^2} = \mathbf{2x}$$
$$\sqrt{25y^2} = \mathbf{5y}$$

Verificando si la multiplicación de las raíces por 2 me arroja el factor no cuadrático:

$$2(2x)\,(5y) = \mathbf{20xy}$$

En base a lo anterior, podemos deducir que el trinomio: $4x^2 + 20xy + 25y^2$ es cuadrado perfecto; entonces:

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x + 5y)^2$$

Ejemplo 2:

Si tenemos la siguiente expresión: $64 - 16y + y^2$, reacomodando los términos tenemos la expresión: $y^2 - 16y + 64$

Verificando los factores cuadráticos:

$$\sqrt{y^2} = \mathbf{y}$$
$$\sqrt{64} = \mathbf{8}$$

Verificando si la multiplicación de las raíces por 2 me arroja el factor no cuadrático:

$$2(y)\,(8) = \mathbf{16y}$$

En base a lo anterior, podemos deducir que el trinomio: $y^2 - 16y + 64$**,** es cuadrado perfecto; entonces:

$$y^2 - 16y + 64 = (y - 8)^2$$

Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto

$36a^2 - 3ab + 25b^2 =$	$y^2 - 10y + 25 =$	$25a^2 - 40ab + 16b^2 =$
$y^2 - 10y - 25 =$	$n^2 + 16n + 64 =$	$9n^2 + 48nm + 64m^2 =$
$n^2 + 18n + 64 =$	$x^2 - 12xy + 36y^2 =$	$4 - 4x + x^2$
$x^2 - 12x^2y + 36y^2 =$	$b^2 - 12b + 36 =$	$x^2y^2 + 8xy + 16$
$b^2 - 10b + 36 =$	$100x^2 - 80x + 16 =$	$25m^2 - 10mn + n^2$
$10x^2 - 10x + 16 =$	$4x^2 - 4xy + y^2 =$	$9x^4 - 30x^3y + 25xy$
$36a^2 - 60ab + 25b^2 =$	$49x^2 - 42xy + 9y^2 =$	$36x^2 - 72x + 81$

Caso 4. Factorización de trinomios cuadráticos de la forma $x^2 + bx + c$

Las expresiones de tipo $x^2 + bx + c$, son polinomios que no son cuadrados perfectos; sin embargo, se pueden factorizar y resultan de multiplicar dos términos de la forma $(x + m)(x + n)$ que tienen las siguientes características:

- Tienen un término común, el cual es la raíz cuadrada de x^2, es decir "x".
- Los términos no comunes son aquellos que al sumarse dan como resultado el valor del coeficiente del termino bx; es decir, igual al factor "b" y cuyo producto es igual a "**c**".

$$mn = c$$
$$m + n = b$$

Ejemplos:

a) $(x + 5)(x - 2)$ es la factorización de: $x^2 + 3x - 10$ debido a lo siguiente:

- Los binomios tienen como termino común la **"x"**
- El producto de los términos NO comunes $(5)(-2)$ es -10
- La suma de los términos NO comunes es $5 + (-2) = 3$

b) $(y - 8)(y - 2)$ es la factorización de: $y^2 - 10y + 16$ debido a lo siguiente:

- Los binomios tienen como termino común la **"y"**
- El producto de los términos NO comunes $(-8)(-2)$ es 16
- La suma de los términos NO comunes es $(-8) + (-2) = -10$

c) $(m + 3)(m + 4)$ es la factorización de: $m^2 + 7m + 12$ debido a lo siguiente:

- Los binomios tienen como termino común la "m"
- El producto de los términos NO comunes $(3)(4)$ es 12
- La suma de los términos NO comunes es $3 + 4 = 7$

d) $(x + 5)(x - 4)$ es la factorización de: $x^2 + x - 20$ debido a lo siguiente:

- Los binomios tienen como termino común la "x"
- El producto de los términos NO comunes $(5)(-4)$ es -20
- La suma de los términos NO comunes es $5 + (-4) = 1$

Ejercicios de factorización de trinomios cuadráticos de la forma $x^2 + bx + c$

$36a^2 - 60ab + 25 =$	$x^2 + 5x + 6 =$	$10x^2 - 28x + 16 =$
$x^2 - 6x - 27 =$	$b^2 - 12b + 36 =$	$y^2 + y - 20 =$
$n^2 + 16n + 64 =$	$x^2 + x - 20 =$	$n^2 - 4n + 3 =$
$x^2 - 12y + 36 =$	$m^2 - 8m + 15 =$	$x^2 - x - 12 =$
$b^2 + 7b + 10 =$	$y^2 - 7y - 18 =$	$a^2 - a - 2 =$
$y^2 - 10y + 25 =$	$x^2 + 11x + 28 =$	$y^2 + 9y - 22 =$
$x^2 - 11x + 24 =$	$a^2 - 6a - 7 =$	$x^2 - 4x - 5 =$

Caso 5. Factorización por agrupamiento

Cuando un polinomio cuenta con cuatro términos, en algunas ocasiones estos pueden factorizarse mediante un arreglo conveniente que consiste en reescribir dicha expresión algebraica como dos binomios, agrupando adecuadamente los términos.

Ejemplo 1: Factorizar la siguiente expresión algebraica: $bx + by + 3x + 3y$

En esta expresión podemos ver que hay dos términos que tienen como factor común la literal "b" y otros dos términos que tienen como factor común el "3"; por lo tanto, los podemos agrupar.

$(bx + by) + (3x + 3y)$

$b(x + y) + 3(x + y)$

Aun así podemos ver que "x + y" se encuentran como factor común en ambas expresiones; entonces, podemos hacer algo más.

$$\underline{(x + y)(b + 3)}$$

Ejemplo 2: Factorizar la siguiente expresión algebraica: $5x^2 - 30x - x + 6$

Primero separamos los cuatro términos colocándolo de la siguiente manera:

$(5x^2 - 30x) - (x - 6)$

Es posible identificar en la expresión algebraica que los primeros dos términos tienen como factor común la ***"x"*** y el ***"5"***, entonces tomamos estos dos términos y los factorizamos de la siguiente forma:

$$5x^2 - 30x \longrightarrow 5x(x - 6)$$

Una vez realizada la factorización de primer término; entonces, la incorporo y me quedaría lo siguiente:

$$5x(x - 6) - (x - 6)$$

Ahora puedo identificar que tengo como factor común el ***"x – 6***", por lo que puedo hacer la siguiente factorización:

$$(x - 6)(5x - 1)$$

Ejemplo 3: Factorizar la siguiente expresión algebraica: $x^2 + 6x + 9 - y^2$

En esta expresión podemos observar que los primeros tres términos forman un trinomio cuadrado perfecto y que "y^2" tiene raíz cuadrada perfecta; por consiguiente, para factorizar el polinomio podemos hacer lo siguiente:

Agrupamos los primeros tres términos:

$$(x^2 + 6x + 9)$$

Tenemos que:

$\sqrt{x^2} = \mathbf{x}$

$\sqrt{9} = \mathbf{3}$

$(x)(3) = \mathbf{3x}$

Por lo tanto, factorizando nos queda: $(x + 3)^2$

Añadiendo el término faltante tendríamos: $(x + 3)^2 - y^2$

Donde podemos ver claramente que tenemos una diferencia de cuadrados y lo podemos representar de la siguiente manera:

$$(x + 3 - y)\,(x + 3 + y)$$

Reacomodando términos tendríamos:

$$(x - y + 3)\,(x + y + 3)$$

Ejercicios de factorización por agrupamiento

$nx + ny + 5x + 5y$	$6x^2 - 48x - x + 8$	$15x^2 - 12x - 10x + 8$
$ux - uy + 7bx - 7by$	$8a^2 - 4ab - 3ab + 6b^2$	$x^3 - y - x + x^2y$
$a^2 - b^2 + 2a + 2b$	$2x^3 + 5x^2 - 2xy^2 - 5y^2$	$8ux + 2u - 4bx - b$
$a^2 - 2ab + b^2 - 4$	$y^2 - 12x + 36 - n^4$	$3a^2 - a + 3a - 1$
$6x + 18 + ax + 3a$	$y^2 - 10y + 25 - w^6$	$2x^2 + 8x - 5x - 20$
$a^2 - b^2 - 8a - 8b$	$w^2 - 2w - xw + 2x$	$ax^2 - a + bx^2 - b$

Caso 6. Factorización de trinomios cuadráticos de la forma $\underline{ax^2 + bx + c}$, por agrupación, con $\underline{a, b}$ y $\underline{c}$ enteros y $\underline{a}$ diferente de <u>cero</u>.

Los pasos que se deben de seguir para factorizar este tipo de trinomios por agrupación son los siguientes:

1.- Encuentra el producto ***ac***.
2.- Encuentra dos números <u>cuyo producto</u> sean ***ac*** y <u>cuya suma</u> sea ***b***.
3.- Con los números encontrados en el paso anterior, reescribe el término ***bx*** como la suma algebraica de dos términos cuyos coeficientes numéricos sean los números obtenidos en el segundo paso.
4.- Factoriza por agrupación.

Nota: No todos los trinomios de este tipo se pueden factorizar.

Ejemplo 1: Factorizar la expresión algebraica: $5a^2 - 8a + 3$

Identificando ***a, b*** y ***c***, tenemos que: $a = 5,\ b = -8$ y $c = 3$

Paso 1: (a)(c) = $(5)(3) = 15$

Paso 2: que la suma de $a + c = b$, en este caso para que eso se cumpla ***a*** y ***c*** tendrán que ser <u>negativos</u>.

$$(-5) + (-3) = -8$$

Paso 3: $-8a = -3a - 5a$, por lo tanto:

Paso 4: $5a^2 - 8a + 3 = \underline{5a^2 - 3a - 5a + 3}$

Si los agrupamos tendríamos:

$$(5a^2 - 3a) + (-5a + 3)$$

Multiplicando por el signo, nos queda:

$$(5a^2 - 3a) - (5a - 3)$$

Factorizando el término semejante del primer binomio tenemos que:

$$a(5a - 3) - (5a - 3)$$

Realizando la factorización final nos queda:

$$\underline{(5a - 3)(a - 1)}$$

Caso 6. Factorización de trinomios cuadráticos de la forma
$\underline{ax^2 + bx + c}$, por agrupación, con $\underline{a, b}$ y $\underline{c}$ enteros y $\underline{a}$ diferente de $\underline{cero}$.

Ejemplo 2: Factorizar la expresión algebraica: $14n^2 - 41n + 15$

Identificando ***a, b*** y ***c***, tenemos que: ***a= 14, b = - 41 y c= 15***

Paso 1: (a)(c) = ***(14)(15) = 210***

Paso 2: como ***ac*** es positivo y ***b*** es n<u>egativo</u>, entonces los dos números buscados <u>tendrán que ser negativos</u>.

$$(-6) + (-35) = -41$$

Paso 3: $-41n = -6n - 35n$, por lo tanto:

Paso 4: $14n^2 - 41n + 15 = 5a^2 - 6n - 35n + 15$

Si los agrupamos tendríamos:

$$(14n^2 - 6n) + (-35n + 15)$$

Multiplicando por el signo, nos queda:

$$(14n^2 - 6n) - (35n - 15)$$

Factorizando el término semejante del primer binomio tenemos que:

$$2n(7n - 3) - 5(7n - 3)$$

Realizando la factorización final nos queda:

$$\underline{(7n - 3)(2n - 5)}$$

Ejercicios de factorización de trinomios cuadráticos de la forma $\underline{ax^2 + bx + c}$, por agrupación, con $\underline{a, b}$ y $\underline{c}$ enteros y $\underline{a}$ diferente de *cero*.

$6x^2 – 19x + 3$	$4x^2 – 8x + 3$
$2y^2 + 3y – 9$	$3n^2 – n - 10$
$2a^2 – 5a + 2$	$12m^2 + 11m - 15$
$2x^2 + 5x + 3$	$3p^2 + 20p + 2$
$2b^2 – b – 3$	$7x^2 – 9x + 2$
$8w^2 – 2w – 3$	$6y^2 – 23y - 4$

Caso 7. Factorización de suma y diferencia de cubos

Para factorizar una suma o diferencia de cubos en dos factores es recomendado seguir los pasos que se mencionarán a continuación:

1.- El primer factor se construye con la suma de las raíces cúbicas de los términos que se encuentran con exponente cúbico.
2.- El segundo factor se construye sumando los cuadrados de dichas raíces cúbicas, y a dicha suma se le resta el producto de sus bases.

Ejemplos de sumas de cubos:

a) $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$
$= \underline{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}$

b) $y^3 + 64 = \underline{(y + 8)(y^2 - 4x + 16)}$

c) $8a^3 + 1 = (2a)^3 + (1)^3$
$= (2a + 1)[(2a)^2 – (2a)(1) + (1)^2]$
$= \underline{(2a + 1)(4a^2 – 2a + 1)}$

d) $125n^3 + 27b^3 = (5n)^3 + (3b)^3$
$= (5n + 3b)[(5n)^2 – (5n)(3b) + (3b)^2]$
$= \underline{(5n + 3b)(25n^2 – 15by + 9b^2)}$

La diferencia de cubos se descompone de manera análoga, solo que:

1.- El primer factor se construye con la diferencia de las bases de los cubos.
2.- El segundo factor se construye como l suma de los cuadrados de dichas bases sumadas con su producto.

Ejemplos de diferencias de cubos:

a) $27a^3 - 8 = (3a)^3 - (2)^3$
$= (3a - 2)[(3a)^2 + (3a)(2) + (2)^2]$
$= \underline{(3a - 2)(9a^2 + 6a + 4)}$

b) $64w^3 - 125 = (8w)^3 - (5)^3$
$= (8w - 5)[(4w)^2 + (4a)(5) + (5)^2]$
$= \underline{(4w - 5)(16a^2 + 20w + 25)}$

Ejercicios de factorización de suma y diferencia de cubos

$a^3 - 27 =$	$8a^3 – 216b^3 =$
$x^3 + 64 =$	$62y^3 – 1$
$1 – y^3 =$	$27 – 125y^6 =$
$n^3 + 125 =$	$8b^6 - 216 =$

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Propiedades de las ecuaciones algebraicas

Una ecuación es una expresión que nos indica que dos cantidades son iguales; por ejemplo:

$$7x - 5 = 16$$
$$X^2 - 8x + 16 = 0$$
$$16 = x + y$$

A la expresión que está colocada a la izquierda del signo de la igualdad se le llama primer miembro o miembro izquierdo, mientras que la que está a la derecha se le llama segundo miembro o miembro derecho.

En una ecuación hay dos tipos de valores: los conocidos y los desconocidos. Estos últimos reciben el nombre de incógnitas y en $4x - 7 = 16$, sus incógnitas son las ***"x"*** y la ***"y"***.

Existen dos tipos de ecuaciones: la ***ecuación identidad*** y la *ecuación condicional*, o simplemente ***ecuación***.

Una ecuación identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor de sus incógnitas; por ejemplo:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Es una identidad porque la igualdad se verifica para cualquiera de los valores de las incógnitas ***"x"*** y ***"y"***.

La Ecuación condicional, o ecuación, es una igualdad que se verifica o se cumple solo para ciertos valores de sus incógnitas.

Ejemplos:

La ecuación $x + 10 = 15$ se cumple si y solo si $x = 5$ ($5 + 10 = 15$).
La ecuación $2x - 5 = 13$, se verifica si y solo si $x = 9$. [$2(9) - 5 = 13$]
Mientras que la ecuación x + y = 4, tiene un conjunto infinito de soluciones pero no se verifica para cualquier par de valores.

<u>*Al conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen una ecuación*</u>, o sea, para los cuales se ***verifica la igualdad***, se les llama ***raíces*** o ***conjunto solución***.

Así, en la ecuación: $7y - 10 = 18$, su raíz o conjunto solución es **4** porque si $y = 4$, entonces: [$7(4) - 10 = 18$]

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tiene el mismo conjunto solución; o sea, tienen las mismas raíces.
Por ejemplo:
La ecuación $x - 4 = 0$, y la ecuación $3x = 12$ son equivalentes ya que ambas ecuaciones tienen como única raíz el número 4.
Ya que: **(4) – 4 = 0** y **3(4) = 12**

Pero en el caso de las ecuaciones $x - 3 = 0$ y la ecuación $x^2 - 9 = 0$, NO son equivalentes porque en el caso de la primera ecuación:
$x= 3$
$(3) - 3 = 0$

Y en la segunda ecuación las raíces son $x = 3$ ***y*** $x= -3$

$(3)^2 - 9 = 0$
$(-3) - 9 = 0$

Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación algebraica significa encontrar las raíces de su conjunto solución; es decir, el valor de sus incógnitas que satisfacen esa ecuación.

El proceso de resolver una ecuación consiste en transformarla en ecuaciones equivalentes cada vez más simples hasta encontrar el valor de sus raíces. Estas transformaciones se obtienen al aplicarse las propiedades de la igualdad.

Propiedad aditiva de la igualdad

Si **a, b** y **c** son números reales cualesquiera tal que $a = b$, entonces $\underline{a + b = b + c}$

De acuerdo con esta propiedad tenemos que: Si a los dos miembros de una ecuación se les suma una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente a ella.
Ejemplos:

$$x - 6 = 4$$

Si a ambos miembros de la ecuación le sumamos 6, entonces tendríamos:

$$x - 6 + 6 = 4 + 6$$

de donde resulta: $x + 0 = 10$

$$x =10$$

De acuerdo a esta propiedad tenemos que:

Si **a = b**, entonces:
$a + (-c) = b + (-c)$, o sea

$$\underline{a - c = b - c}$$

De lo anterior podemos concluir lo siguiente:

Si a los dos miembros de una ecuación se les resta una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente a ella.

Ejemplos:

$x + 9 = 10$

Si restamos el número **9** de ambos miembros de la ecuación tendríamos:

$x + 9 - 9 = 10 - 9$

de donde resulta: ***$x + 0 = 1$***

$x = 1$

Propiedad multiplicativa de la igualdad

Si **a, b** y **c** son números reales, donde ***c*** es diferente de **cero** y ***a = b***, entonces ***ac = bc***

De acuerdo con esta propiedad podemos afirmar lo siguiente:

Si ambos miembros de una ecuación se multiplica por una misma cantidad no nula (diferente de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo 1:

$x/3 = 7$

Si ambos miembros de la ecuación se multiplica por **3** (*inverso multiplicativo de 1/3*) resulta:

$$x/3\,(3) = 7(3)$$
$$x(1) = 21$$
$$\underline{x = 21}$$

Ejemplo 2:

$4/5\,x = 8$

Si ambos miembros de la ecuación se multiplica por **5/4** (*inverso multiplicativo de 4/5*) resulta:

$$4/5\,x\,(5/4) = 8(5/4)$$
$$x(1) = 40/4$$
$$\underline{x = 10}$$

Propiedad divisora de la igualdad

Si **a, b** y **c** son números reales cualesquiera tales que ***a = b*** y ***c*** es diferente de cero entonces ***a/c = b/c***

De acuerdo con esta propiedad podemos afirmar lo siguiente:

Si ambos miembros de una ecuación se dividen entre una misma cantidad no nula (diferente de cero), se obtiene una ecuación equivalente a ella.

Ejemplo 1:

$$5x = 40$$

Si dividimos ambos miembros de la ecuación **entre 5** resulta:

$$\frac{5x}{5} = \frac{40}{5}$$

$$\underline{X = 8}$$

Otras propiedades de la igualdad son las siguientes:

a) ***Si ambos miembros de la ecuación se elevan a una misma potencia, se obtiene otra, la cual no necesariamente es equivalente a la original.***

Ejemplo 2:

$$\sqrt{x} = 5$$

Si elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado resulta:

$(\sqrt{x})^2 = (5)^2$ **tenemos:**

$$\underline{X = 25}$$

Nota: esto es debido a que $\sqrt{x} = (x^{1/2})$ si lo elevamos a la potencia **2** sería $(x^{1/2})^2$ y de acuerdo a la ley de los exponentes esto es $(x^n)^m = x^{n.m}$

Ejemplo 3:

$$\sqrt{y + 6} + 7 = 4$$

$$\sqrt{y + 6} + 7 - 7 = 4 - 7$$

$$(\sqrt{y + 6})^2 = (-3)^2$$

$$y + 6 - 6 = 9 - 6$$

$$\underline{y = 3}$$

Otras propiedades de la igualdad son las siguientes:

Otra propiedad de la igualdad es:

b) Si a ambos miembros de una ecuación se les extrae la raíz cuadrada se obtiene otra ecuación equivalente a la anterior.

Ejemplo:

$$\mathbf{x^2 = 36}$$

Al extraer raíz cuadrada a los miembros de la ecuación anterior resulta:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$$
$$\underline{x = 6}$$

Transposición de términos

Es un proceso algebraico que consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro aplicando la regla siguiente:

Cualquier término de una ecuación puede transponerse (cambiarse) de un miembro a otro, con la condición de que se le cambie el signo.

La regla anterior se deriva de la aplicación de las propiedades de la igualdad.

a) En la ecuación $x + 6 = 8$, podemos dejar la incógnita x sola en el miembro izquierdo al transponer el número ***6*** al otro miembro con el signo contrario, o sea <u>pasa con signo negativo</u>.

$$x + 6 = 8$$
$$x = 8 - 6$$
$$\underline{x = 2}$$

b) En la ecuación $x - 7 = 3$, podemos dejar la x sola en el miembro izquierdo transponiendo el número ***7*** al derecho <u>con signo positivo</u>, osea:

$$x - 7 = 3$$
$$x = 3 + 7$$
$$\underline{x = 10}$$

Solución de ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es aquella que puede escribirse en la forma **ax +b = c**, donde ***a, b*** y ***c*** son constantes arbitrarias, y con la condición de que ***a*** sea diferente de cero. A este tipo de igualdades se les llama también ***ecuaciones de primer grado***, ya que el exponente de la incógnita es la unidad.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se siguen los pasos que a continuación se mencionan:

1.- Realizar las operaciones algebraicas indicadas, en caso de que las haya.
2.- Reducir términos semejantes de ser posible en ambos miembros de la ecuación.
3.- Transponer términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contienen la incógnita a un lado y los que no contengan literales en el otro lado.
4.- Reducir términos semejantes, obteniendo una expresión de forma ***ax = m***.
5.- Al reducir términos semejantes se obtiene una ecuación equivalente a la original; por lo tanto, el siguiente paso es despejar la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita, osea:

$$\frac{ax}{a} = \frac{m}{a} \qquad x = m/a$$

6.- Comprobar que la raíz obtenida satisface la ecuación original.

Ejemplo 1:

Sea la ecuación algebraica: ***4(x – 3) – 8(x -6) = 7(x – 6) + 34***, para obtener el valor de la incógnita se siguen los siguientes pasos:

Primero se efectúan las operaciones necesarias para eliminar los paréntesis:

4(x – 3) – 8(x -6) = 7(x – 6) + 34

4x – 12 – 8x + 48 = 7x – 42 + 34

Después, se reducen los términos semejantes en cada uno de los dos miembros:

$$\boxed{4x} - 12 \boxed{-8x} + 48 = 7x - 42 + 34$$

-4x + 36 = 7x - 8

Efectuamos transposición de términos de un miembro a otro.

-4x – 7x = - 8 - 36
-11x = - 44
x = -44/-11 (-)/(-) = +
x = 4

Comprobación

Solución de ecuaciones lineales con una incógnita

Ejemplo 2:

Sea la ecuación algebraica: $(3x - 5)(2x + 3) = (5x + 3)(2x - 4) - (2x - 3)(2x + 3) + 40$, para obtener el valor de la incógnita se siguen los siguientes pasos:

Primero se efectúan las Multiplicaciones necesarias:

Del primer miembro tenemos:
$(3x - 5)(2x + 3) = 6x^2 + 9x - 10x - 15$, reduciendo términos: $6x^2 - x - 15$

Del segundo miembro tenemos:
$(5x + 3)(2x - 4) = 10x^2 - 20x + 6x - 12$, reduciendo términos: $10x^2 - 14x - 12$

También tenemos esta multiplicación que si nos damos cuenta es un producto de dos binomios conjugados y lo podemos resolver fácilmente:
$(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9$, reuniendo todo lo obtenido nos queda:

$$6x^2 - x - 15 = 10x^2 - 14x - 12 - (4x^2 - 9) + 40$$

Sin embargo, tengo que eliminar el paréntesis que aún queda, y ese lo elimino <u>multiplicando por el signo **(-1)**</u>, y me quedaría:

$$6x^2 - x - 15 = 10x^2 - 14x - 12 - 4x^2 + 9 + 40$$

Reduciendo términos semejantes me quedaría:

$$6x^2 - x - 15 = 10x^2 - 14x - 12 - 4x^2 + 9 + 40$$

$$6x^2 - x - 15 = 6x^2 - 14x + 37$$

Reacomodando los términos:

$6x^2 - 6x^2 - x + 14x = 37 + 15$, eliminando términos semejantes quedaría:

$13x = 52$, despejando la ***"x"*** tenemos:

$$x = 52/13$$

$$\underline{x = 4}$$

Ejemplo 3:

Sea la ecuación algebraica: $\frac{x}{2} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$, obtener la incógnita.

Primero efectúo la suma de los dos términos del miembro dos, para obtener una sola cantidad.

$\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3x + 2}{4}$, ahora tendría la siguiente ecuación equivalente:

$$\frac{x}{2} = \frac{3x + 2}{4}$$

Ahora paso el 4 del miembro 2 al miembro 1 con la operación contraria, si está dividiendo lo paso multiplicando y quedaría de la siguiente manera:

$$4\left[\frac{x}{2}\right] = 3x + 2$$

En este caso el 2 del denominador, divide al 4 y nos queda:

2x = 3x + 2, y transponiendo términos tenemos:

2x – 3x = 2, simplificando términos me quedaría:

-x = 2, multiplicando todo por ***– 1***, nos queda:

x = -2

Ejercicios de ecuaciones lineales con una incógnita

$6(3x-1)-2x= 2(2x-)-8$	$9(2x-6)-(x+3)= 4x-18$
$15x-5(2x-1)= 3(3x)-5$	$4(6-x)-2(3-x)-5= 9(5-2x)$
$3(4x-3)-(x+7)= 5(10-x)$	$8(3x+2)-5(2x-1)= 8-(9-3x)$
$50-5(x+3)=10(x+2)$	$7x-2(x-6)= 3/4(8x-12)-(5-x)$
$7(x+3)-3(x-2)= 16-(2x-3)$	$8(1-x)-2(x+1)=3(2-2x)$

Ejercicios de ecuaciones lineales con una incógnita

x(x-15)-3=(x+6)(x-6)-18x	$(x+3)^2$+5= (x+5)(x-5)+(4-x)
(3x-5)(8+4)= x(3x-7)+8	$(y-4)^2$-(2-y)=(y+5)(y-2)
4x+13/7 -1=3x-5/10	2x/3 - x/6= 2
2x/2 - 5/20= 1-x/2	3x/2-x/8=5/4
0.045x+ 0.02=0.075x-0.01	3.5x+0.4= 8.5x+5.4

Ejercicios de ecuaciones lineales con una incógnita

$\sqrt{5x-4}=6$	$3\sqrt{x-5}+8=11$
$\sqrt{4-3x} = 6$	$\sqrt{4x-7}+2= 10$
$\sqrt{7x-6}-4=6$	$\sqrt{5-4x}-1= 6$
$3\sqrt{2x+5}+2=11$	$2\sqrt{x+5}-1= 7$

Solución de ecuaciones lineales en modelos matemáticos.

Para resolver problemas planteados en lengua verbal se recomienda lo siguiente:

- Lee el problema con atención para identificar las incógnitas y las cantidades conocidas.
- Elegir las letras que utilizara para resolver las incógnitas del problema.
- Expresar mediante una ecuación la relación que existe entre los datos del problema.
- Encuentra el valor o los valores de las incógnitas de la ecuación que resultan en el paso anterior.
- Verifica la solución obtenida.

Ejemplo 1:

Ana es 8 años mayor que Carlos, pero hace 3 años tenía el triple de edad que él, determina la edad que tiene cada uno de ellos actualmente.

Carlos **"x"** la edad actual.
x + 8 la edad actual de Ana.
x - 3 la edad de calos (3años atrás).

La edad de Ana 3 años atrás
= x + 8 - 3
= x + 5

Relacionando ambas edades 3 años atrás:

x + 5 = 3(x-3)
x+ 5 = 3x - 9 ***Ana = 15 años***
x - 3x = - 9 - 5 ***Carlos = 7años***
-2x = -14
x = -14/-2
x = 7 ← esta es la edad actual de Carlos.

Ejemplo 2:

Gloria es 2 veces mayor que Gina y dentro de 15 años la suma de sus edades será de 105 años ¿Qué edad tiene ella actualmente?

Gina =”x”
Gina = x+15
Gina= 2x+15

(2x +5) + (x + 15) = 105
2x + 15 + x + 15 = 105
3x + 30 = 105
3x = 105 - 30
3x = 75
x = 75/3
<u>x = 25</u>

<u>Gloria tiene 25 años</u>

Ejemplo 3:

Encuentra 3 números enteros consecutivos cuya suma sea igual a 105

(x)+(x+1)+(x+2)=105
x+x+1+x+2=105
3x+3=105
3x=105-3
3x=102
x =102/3
x =34
(34)+ (34+1)+ (34+2) = 105
34 + 35 + 36 = 105

Los números son: <u>34, 35 y 36</u>

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La ecuación lineal o de primer grado con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos o más ecuaciones de la forma: $ax + by = c$

Como ecuaciones lineales debemos de entender que son aquellas ecuaciones de primer grado (aquellas ecuaciones donde la variable o variables posen como exponente máximo 1) y su grafica nos representa una línea recta.

Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Los métodos utilizados para resolver ecuaciones de éste tipo son los siguientes:

a) Método de eliminación (suma y resta)
b) Método de sustitución
c) Método de igualación
d) Método por determinantes o de cramer

Método de eliminación (suma y resta)

Éste método consiste en eliminar una de las incógnitas de tal forma que el sistema de ecuaciones se reduzca a una sola ecuación con una incógnita.

Lo anterior se puede lograr al aplicar la siguiente propiedad de la igualdad: Si a ambos miembros se le suman o restan los de otra igualdad, se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 1:

$4x - \cancel{y} = 8$ ecuación 1
$\underline{7x + \cancel{y} = 3}$ ecuación 2
$11x = 11$
$x = 11/11$
$\underline{\mathbf{x = 1}}$

4(1)-(4)=8 = 4+4= y 8=8
7(1)-(-4)=8 = 7-4=3 y 3=3

Sustituyendo el valor de "x" en ecuación 1
$4(1)-y= 8$
$4-y= 8$
$-y= 8-4$
$-y= 4$
$y = 4/1$
$\underline{\mathbf{y = -4}}$

Comprobación:
4(1)-(4)=8 = 4+4= y 8=8
7(1)-(-4)=8 = 7-4=3 y 3=3

Método de eliminación (suma y resta)

Ejemplo 2:

$3x \cancel{+ y} = 10$ ecuación 1
$\underline{2x \cancel{- y} = 5}$ ecuación 2
$5x = 15$
$x = 15/5$
$\underline{\mathbf{x = 3}}$

Comprobación:
$3(3) + (1) = 10$
$9 + 1 = 10$
$10 = 10$

Sustituyendo el valor de “x” en ecuación (1)

$3(3) + y = 10$
$9 + y = 10$
$y = 10 - 9$
$\underline{\mathbf{y = 1}}$

Ejemplo 3:

$7x - 15 = -2y$ ecuación 1
$\underline{5y - 3 = -6x}$ ecuación 2

Reacomodando los términos de la forma ax + by = c

$7x + 2y = 15$
$\underline{6x + 5y = 3}$

Como no se elimina ninguna variable de manera directa, se procede a multiplicar ambas ecuaciones por cualquiera de los coeficientes ya sea de **“x”** o de **“y”** con signos opuestos para propiciar su eliminación.

$7x + 2y = 15 \quad (5)$
$\underline{6x + 5y = 3} \quad (-2)$

Multiplicando quedaría:

$35x + 10y = 75$
$\underline{-12x - 10y = -6}$
$23x \qquad = 69$

Despejando “x”

$23x = 69$
$x = 69/23$
$\underline{\mathbf{x = 3}}$

Sustituyendo el valor de “x” en ecuación 2

$6(3) + 5y = 3$
$18 + 5y = 3$
$5y = 3 - 18$
$5y = -15$
$y = -15/5$
$\underline{\mathbf{y = -3}}$

Ejercicios de Método de eliminación (suma y resta)

$2x + y = 3$
$\underline{5x + 3y = 10}$

$4x - 7y = -10$
$\underline{3x + 2y = 7}$

$8x - 5 = 3y$
$\underline{-4 = -5x + 2y}$

Ejercicios de Método de eliminación (suma y resta)

2x + 2 = - y
- 5y- 18 = - 6x

2x - 1 = 3y
- 4y – 7 = – 3x

8x - 29 = y
-11 + y = - 2x

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema en caso de que sea necesario, y después sustituir la expresión equivalente en la otra.

Como resultado de esta sustitución se obtiene una ecuación con una incógnita, la cual al resolverla se encuentra el valor de ésta incógnita.

Por último, se sustituye le valor de esta incógnita en la otra ecuación para obtener el valor de la incógnita restante.

Ejemplo:

$5x + 7y = 1$ ecuación 1
$3x + 2y = 5$ ecuación 2

Despejando "x" de ecuación 2 : *3x + 2y= 5*

$3x + 2y = 5$

$3x = -2y + 5$

$x = \frac{-2y + 5}{3}$ **Valor de "x" ecuación 3**

Sustituyendo el valor de "x" en ecuación 1

$5x + 7y = 1$

$5\left[\frac{-2y + 5}{3}\right] + 7y = 1$

Multiplicando por el 5

$\frac{-10y + 25}{3} + 7y = 1$

Multiplicamos ambos términos por 3, para eliminar el 3 del denominador.

$(\cancel{3})\left[\frac{-10y + 25}{\cancel{3}}\right] + 7y = 1\ (3)$

Quedaría:

$-10y + 25 + 21y = 3$

Simplificando términos y reacomodando la ecuación:

$11y = 3 – 25$

$11y = -22$

$y = -22/11$

$\underline{y = -2}$

Sustituyendo "y" en la ecuación 3

$x = \frac{-2y + 5}{3}$

$x = \frac{-2(-2) + 5}{3} \longrightarrow x = \frac{4 + 5}{3} \quad x = \frac{9}{3} \longrightarrow \underline{x = 3}$

Ejercicios de Método de Sustitución

$5x + y = -17$
$\underline{2x + 5y = 7}$

$8x - y = 49$
$\underline{3x + 2y = -3}$

$3x - 4y = 20$
$\underline{\ \ x - 12y = -20}$

Ejercicios de Método de Sustitución

$4x + 5y = 48$
$\underline{-3x + y = 2}$

$x + y = 23$
$\underline{9x - 8y = 20}$

$6x + 5y = -17$
$\underline{5x - 12y = 2}$

Método de Igualación

Este método consiste en despejar una misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema, después igualar ambas expresiones equivalentes y resolver la ecuación obtenida con dicha igualación.

Para obtener la otra incógnita, se sustituye el valor de la variable obtenida en la igualación anterior en cualquiera de las ecuaciones originales.

Ejemplo:

$8x - 3y = 17$ ecuación 1
$7x - 4y = 8$ ecuación 2

Despejando "x" de ambas ecuaciones:

$8x - 3y = 17$
$8x = 17 + 3y$
$x = \frac{17 + 3y}{8}$ ecuación 3

$7x - 4y = 8$
$7x = 8 + 4y$
$x = \frac{8 + 4y}{7}$ ecuación 4

Igualamos las expresiones equivalentes de la incógnita "x"

$$\frac{17 + 3y}{8} = \frac{8 + 4y}{7}$$

Resolvemos las ecuaciones igualadas, cruzando los denominadores de ambos miembros.

$7(17 + 3y) = 8(8 + 4y)$
$119 + 21y = 64 + 32y$
$21y – 32y = 64 -119$
$-11y = -55$
$y = -55/-11$
$\underline{y = 5}$

Sustituyendo el valor de "y" en ecuación 3

$x = \frac{17 + 3(5)}{8}$
$x = \frac{32}{8}$
$\underline{x = 4}$

Ejercicios de Método de Igualación

$28x - 5y = 28$
$\underline{4x + 9y = -6}$

$3x + 2y = 2$
$\underline{-2x + y = 8}$

$x - 3y = -4$
$\underline{2x - y = 7}$

Ejercicios de Método de Igualación

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -1 \\ 10x + 21y &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 10y &= 56 \\ 15x - 14y &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 4y &= -18 \end{aligned}$$

Método de Determinantes (Regla de Cramer)

Un determinante es un arreglo de números encerrado entre dos barras verticales. Un determinante está constituido por columnas e hileras o renglones.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}_{2x2} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 4 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}_{3x3}$$

Segundo orden **Tercer orden**

Cuando un determinante tiene el mismo número de renglones que de columnas decimos que el determinante es cuadrado.

Para un determinante de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo 1: Resolver

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \; 2x2 \quad = (2)(-2) - (3)(7) = -4 - 21 = \underline{-25}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (8)(3) - (-6)(2) = 24 + 12 = \underline{36}$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (-7)(2) - (4)(-3) = -14 + 12 = \underline{-2}$$

Las expresiones equivalentes de las incógnitas de un sistema de ecuaciones sería de la siguiente forma, considerando los coeficientes de acuerdo a una ecuación de la forma: ***ax + by = c***

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

El denominador de ambas expresiones es mismo números **$a_1b_2 - a_2b_1$,** el cual resulta de evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

Este denominador se representará con el símbolo ***D***.

Método de Determinantes (Regla de Cramer)

El numerador de la expresión equivalente a la incógnita ***"x"*** es el número $\mathbf{c_1b_2 - c_2b_1}$**,** el cual resulta al evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_1a_2$$

El numerador de la expresión equivalente a la incógnita ***"y"*** es el número $\mathbf{a_1c2 - a_2c_1}$**,** el cual resulta al evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_1c_2$$

Para **"x"**, se representara como **Dx** y para **"y"** se representará como **Dy.**

De acuerdo con lo anterior, para resolver un sistema de ecuaciones por el método de determinantes aplicamos lo que se conoce como la ***regla de Cramer***, la cual dice que:

$x = \frac{Dx}{D}$; o sea: $$\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$y = \frac{Dy}{D}$; o sea: $$\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Si al evaluar el determinante ***D*** resulta que es igual a cero, la ***regla de Cramer*** no se puede aplicar, ya que la división entre dicho número no está definida.

Ejemplo: Utiliza la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x - y = 30$$
$$4x + 3y = 1$$

Identificar ***a, b*** y ***c***

$a_1 = 3$ $a_2 = -1$ $c_1 = 30$

$a_2 = 4$ $b_2 = 3$ $c_2 = 1$

Método de Determinantes (Regla de Cramer)

Plantear y resolver los determinantes:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(3) - 4(-1) = \underline{13}$$

$$\mathbf{Dx} = \begin{vmatrix} 30 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 30(3) - (-1) = \underline{91}$$

$$\mathbf{Dy} = \begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 4(30) = \underline{-117}$$

De acuerdo con la regla de Cramer:

$$x = \frac{Dx}{D} = 91/13 = \underline{\boldsymbol{7}}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = -117/13 = \underline{\mathbf{-9}}$$

Comprobación:

Sustituyendo los valores de **"x"** y **"y"** tendríamos**:**

3x - y = 30

3(7) – (-9) = 30

21 + 9 = 30

30 = 30

Ejercicios del Método de Determinantes (Regla de Cramer)

$3x - 5y = -15$
$2x + y = 16$

$7x + 8y = -5$
$-x + 9y = 21$

Ejercicios del Método de Determinantes (Regla de Cramer)

$6x - 5y = 28$
$4x + 9y = - 6$

$8x - 5y = - 4$
$2x - 3y = -8$

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como modelos matemáticos.

A continuación se verán algunos ejemplos de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Problema 1.

En un súper 5kg de almendra y 4 kg de nuez cuestan $ 46.00, mientras que 8kg de almendras y 6 kg de nuez cuestan $72.00 encuentra el precio por kilogramo de producto.

Solución:

Si ***"x"*** representa el precio de 1 kg de almendra y ***"y"*** representa el precio de 1 kg de nuez, entonces nos resultan las siguientes ecuaciones:

5x + 4y = 46 (ecuación 1)
8x + 6y = 72 (ecuación 2)

El problema se puede resolver por cualquiera de los métodos estudiados anteriormente, en este caso se empleará el método de eliminación (suma y resta).

Se eliminará la variable "x", multiplicando por (8) la ecuación 1 y por (-5) la ecuación 2.

$$5x + 4y = 46 \ (8)$$
$$\underline{8x + 6y = 72} \ (-5)$$

Se obtiene:

$$\cancel{40x} + 32y = 368$$
$$\underline{\cancel{-40x} - 30y = -360}$$
$$2y = 8$$
$$y = 8/2$$
$$\mathbf{y = 4}$$

Sustituyendo el valor obtenido de "y" en ecuación 1, para obtener el valor de "x".

$$5x + 4(4) = 46$$
$$5x + 16 = 46$$
$$5x = 46 - 16$$
$$5x = 30$$
$$x = 30/5$$
$$\underline{\mathbf{x = 6}}$$

El kilogramos de <u>almendras</u> cuestan **$ 6.00** y la <u>nuez</u> cuesta **$ 4.00**

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como modelos matemáticos.

Problema 2.

En un juego de Beis bol se vendieron 10 000 boletos. El precio de los boletos en la sección de numerados fue de \$100.00 y en la general fue de \$50.00. Si el ingreso total obtenido fue de \$ 650 000.00, determine cuantos boletos se vendieron en la sección numerada y cuantos en la sección general.

Solución:

Si se considera la variable ***"x"*** como el número de boletos vendidos en la sección numerada, y la variable ***"y"*** como los boletos vendidos en la sección general, entonces las ecuaciones que resultan son:

x + y = 10 000 (ecuación 1)
100x + 50y = 650 000 (ecuación 2)

Multiplicando el primer miembro por – 50, obtenemos:

$$\begin{array}{r} -50x - \cancel{50y} = -500\,000 \\ \underline{100x + \cancel{50y} = 650\,000} \\ 50x \qquad\quad = 150\,000 \end{array}$$

50x = 150 000
x = 150 000/50
x= 3 000

Sustituyendo el valor obtenido de la variable "x" en la ecuación 1, tendríamos:

x + y = 10 000
3 000 + y = 10 000
y = 10 000 – 3 000
y = 7 000

Se vendieron **3 000 boletos** en la sección de numerados y **7 000 boletos** en la sección general.

Ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como modelos matemáticos.

Problema 1.

Si 12 kg de papas y 6 kg de arroz cuestan $102.00, mientras que 9 kg de papas y 13 kg de arroz cuestan 153, ¿Cuál es el precio por kilogramo de cada producto?

En un juego de Fut bol se vendieron12 000 boletos. El precio de los boletos es de $25.00 a raza de pasto y $15.00 en sección general. Si el ingreso total de boletos vendidos fue de $220 000.00, ¿Cuántos boletos de vendieron en cada sección?

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Definición de conceptos.

Expresión general de una ecuación cuadrática

Una ecuación de segundo grado, también llamada cuadrática con una incógnita, es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde ***a, b*** y ***c*** son constantes, y ***a*** es <u>diferente de cero</u>; por ejemplo: $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Ecuación cuadrática pura

Es aquella ecuación cuadrática que carece del término ***"x"***; por ejemplo: $5x^2 - 80 = 0$. En general toda ecuación de este tipo tiene forma $ax^2 + c = 0$, donde ***a*** y ***c*** son contantes y <u>ambas diferente de cero</u>.

Ecuación cuadrática mixta

Es aquella ecuación cuadrática que carece de término constante; por ejemplo: $x^2 + 7x = 0$.En general toda ecuación de este tipo tiene la forma $ax^2 + bx = 0$, con ***a*** y ***b*** constantes y <u>ambas diferente de cero</u>.

Número de raíces de una ecuación cuadrática

Es el conjunto solución de una ecuación cuadrática, generalmente consta de dos raíces.

Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

1. Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$ con a diferente de cero, primero se despeja la x^2 y posteriormente se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros y se resuelve la ecuación con el valor absoluto que resulte.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación: $x^2 - 64 = 0$, entonces:

$$x^2 = 64$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$$
$$|x| = 8$$
$$\underline{x = 8}$$
$$\underline{x = -8}$$

Este tipo de ecuaciones también puede resolverse factorizándose, cuando la expresión $ax^2 + c$ puede descomponerse en factores. En ese caso dicha expresión se factoriza y se iguala cada factor a cero. Las soluciones de cada ecuación forma el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación: $4x^2 - 25 = 0$, entonces:

$4x^2 - 25 = 0$
$(2x - 5)(2x + 5)$

$2x - 5 = 0$	$2x + 5 = 0$
$2x = 5$	$2x = -5$
$\underline{x = 5/2}$	$\underline{x = -5/2}$

2. La resolución de ecuaciones cuadráticas mixtas de la forma $ax^2 + bx = 0$, con a diferente de cero. Este tipo de ecuaciones se resuelven fácilmente por factorización al descomponer en factores la expresión $ax^2 + bx$.

Como ***"x"*** es un factor común de la expresión anterior tenemos que:

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$

Ejemplo:
$6x^2 + 30x = 0$
$x(6x + 30) = 0$, de donde
$\underline{x = 0}$

$6x + 30 = 0$
$6x = -30$
$x = -30/6$
$\underline{x = -5}$

Ejercicios de ecuaciones cuadráticas incompletas

$x^2 + 6x = 0$	$5x^2 + 15x = 0$	$x^2 - 81 = 0$
$2x^2 - 14x = 0$	$4x^2 - 20x = 0$	$2x^2 - 98 = 0$
$x^2 - x = 0$	$2x^2 - 128 = 0$	$3x^2 - 42 = 0$

Ecuaciones cuadráticas completas

Dentro de los métodos que se utilizan para resolver ecuaciones cuadráticas completas se encuentran las siguientes:

- *Factorización*
- *Completar el trinomio cuadrado perfecto*
- *Fórmula general*

Método de factorización

Para resolver ecuaciones cuadráticas completas por este método se requiere que la ecuación esté escrita en su fórmula general o normal. El método consiste en descomponer en factores la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, igualar cada factor a cero y después resolver cada ecuación para “x”. Las soluciones de las ecuaciones que resultan de igualar a cero cada factor forman el conjunto solución para la ecuación cuadrática.

Ejemplo 1:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - 4)(x - 3)$

$x - 4 = 0 \qquad x - 3 = 0$

$\underline{x = 4} \qquad \underline{x = 3}$

Ejemplo 2:

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x - 5)(x + 2)$

$x - 5 = 0 \qquad x + 2 = 0$

$\underline{x = 5} \qquad \underline{x = -2}$

Ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas por factorización

$x^2 - 5x + 6 = 0$	$x^2 - 8x + 16 = 0$
$x^2 - 3x - 10 = 0$	$x^2 - 3x - 18 = 0$
$3x^2 + x - 10 = 0$	$x^2 - 2x - 24 = 0$
$x^2 + x - 20 = 0$	$x^2 - 7x - 18 = 0$
$x^2 + 3x - 4 = 0$	$2x^2 - x - 21 = 0$

Método de completar un trinomio cuadrado perfecto

Este método será explicado con el apoyo de un ejemplo como es el siguiente:

$\boldsymbol{3x^2 + 2x - 8 = 0}$

Solución:

Paso 1. Se divide ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de ***"x²"***, en este caso **"3"**

$\frac{3x^2 + 2x - 8}{3} = \frac{0}{3}$, de donde resulta;

$x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{8}{3} = 0$

Paso 2. Se transpone el término constante de la ecuación al segundo miembro con signo contrario.

$x^2 + \frac{2x}{3} = \frac{8}{3}$

Paso 3. Se suman ambos miembros de la ecuación, con un número tal que el miembro izquierdo se forme un trinomio cuadrado perfecto. Para conseguir esto se divide entre **2** el coeficiente de **"x"** y se eleva al cuadrado el coeficiente obtenido.

$\frac{2}{3} \div 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$x^2 + \frac{2x}{3} + \left[\frac{1}{3}\right]^2 = \frac{8}{3} + \left[\frac{1}{3}\right]^2$

Paso 4. Factoriza el trinomio cuadrado perfecto del miembro izquierdo y simplifica el lado derecho de la ecuación.

Factorizando el primer miembro:

$x^2 + \frac{2x}{3} + \left[\frac{1}{3}\right]^2$

$\left[x + \frac{1}{3}\right]^2$

Simplificando el segundo miembro:

$\frac{8}{3} + \left[\frac{1}{3}\right]^2$

$8/3 + 1/9 = \frac{24 + 1}{9} = \mathbf{25/9}$

Entonces tenemos:

$\left[x + \frac{1}{3}\right]^2 = 25/9$

Paso 5. Si el número que aparece en el miembro derecho es positivo, existe raíz cuadrada en ambos miembros y resuelve la ecuación con el valor absoluto que resulte.

$$\sqrt{\left[x + \frac{1}{3}\right]^2} = \sqrt{25/9}$$

$|x + 1/3| = 5/3$, de donde resulta:

x + 1/3 = 5/3 o **x + 1/3 = - 5/3**

Despejando "x" de ambas ecuaciones:

x = 5/3 - 1/3 x = - 5/3 - 1/3

x = 4/3 x = - 6/3

x = - 2

Verificación:

Método de solución por fórmula general

Por el método de completar un trinomio cuadrado perfecto es posible deducir la fórmula que se utiliza para resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita. Dicha fórmula se conoce con el nombre de *fórmula general*.

Para obtenerla resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con ***a, b*** y ***c*** constantes y a diferente de cero, por el método mencionado.

La expresión de la fórmula general para resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para resolver una ecuación cuadrática por medio de la fórmula general se sugiere realizar lo siguiente:

1.- Escribir la ecuación cuadrática en la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, en caso necesario.
2.- Determinar los valores numéricos de ***a, b, -b*** y ***c.***
3.- Evaluar el valor determinante (d) para determinar si la ecuación tiene o no solución para el conjunto de los números reales, el número y la naturaleza de sus raíces.
4.- Sustituye los valores de a, -b y d en la fórmula y después evalúa dicha expresión para obtener el conjunto solución.

Ejemplo 1:

$$3x^2 + 17x - 28 = 0$$

Identificar los valores numéricos y calcular el valor discriminante.

$a = 3 \qquad b = 17 \qquad -b = -17 \qquad c = -28$

$d = b^2 - 4ac$
$d = (17)^2 - 4(3)(-28)$
$d = 289 - 336$
$d = \underline{625}$

Como el discriminante es un cuadrado perfecto **(√625=25),** las raíces de la ecuación son reales, racionales y diferentes.

Ahora se aplica la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\mathbf{x = \frac{-17 + \sqrt{625}}{2(3)}}$$

$$\mathbf{x = \frac{-17 + 25}{6}} \qquad \mathbf{x = \frac{-17 - 25}{6}}$$

x = 8/6 **x = -42/6**

$\underline{\mathbf{x_1 = 4/3}}$ $\underline{\mathbf{x_2 = -7}}$

Ejemplo 2:

$$\boldsymbol{x^2 - 10x + 25 = 0}$$

Identificar los valores numéricos y calcular el valor discriminante.

a = 1 ***b= -10*** ***- b = 10*** ***c= -25***

***d* =** $b^2 - 4ac$
***d* =** $(10)^2 - 4(-10)(25)$
***d* =** 100 – 100
***d* = 0**

Como el discriminante es cero, las raíces de la ecuación son reales e iguales; en otras palabras. El conjunto solución es una raíz doble, y como los coeficientes son constantes enteros, esta raíz es racional.

Ahora se aplica la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\mathbf{x = \frac{10 + 0}{2(1)}} \qquad \mathbf{x = \frac{10 - 0}{2(1)}}$$

x = 10/2 **x = 10/2**

$\underline{\mathbf{x_1 = 5}}$ $\underline{\mathbf{x_2 = 5}}$

Ejercicios por el método de solución por fórmula general

$-x^2 + 5x - 7 = 0$	$5x^2 - 11x - 12 = 0$
$x^2 - 3x = 8$	$2x^2 - 7x - 5 = 0$
$3x^2 - 2x + 5 = 0$	$3x^2 - 5x + 1 = 0$

Ejercicios por el método de solución por fórmula general

$5x^2 + 1 = -5x$	$-4x^2 - 3 = 8x$
$8x^2 + 4x = 1.5$	$7x + 1 = -5x^2$

Las ecuaciones cuadráticas como modelos matemáticos

Algunos problemas aplicados relacionados con modelos matemáticos donde la ecuación es cuadrática serían los siguientes:

1.- El producto de dos enteros pares consecutivos es 360. Encuentra el número mayor.

Solución

Si ***"x"*** es un número menor, entonces ***x + 2*** es la expresión que representa al mayor, entonces:

$x(x + 2) = 360$

$x^2 + 2x = 360$

$\underline{x^2 + 2x - 360 = 0}$

Al resolver la ecuación anterior por factorización quedaría:

$(x + 20)$ $(x - 18)$

$x + 20 = 0$ $x - 18 = 0$

$\underline{x = -20}$ $\underline{x = 18}$

Si $x = 18$, entonces $x + 2 = 20$

Si $x = -20$, entonces $x + 2 = - 20 + 2 = -18$

Entonces la solución sería: **$\underline{x = 20}$**

Verificación:

$\underline{(20)\ (18) = 360}$

2.- El largo de un rectángulo mide 6 metros más que su ancho. Si su área es de 280 m^2, encuentra sus dimensiones.

Solución

Si ***"x"*** representa la longitud de su ancho en metros, entonces la expresión de su largo es ***x + 6***, de donde:

$A = x(x+6)$

$x(x+6) = 280$, entonces

$x^2 + 6x - 280 = 0$

Factorizando:

$(x + 20)\ (x - 14) = 0$

$\underline{x = -20}$ $\underline{x = 14}$

x = -20 se descarta porque la longitud de un ancho no puede ser negativo; por lo tanto, ***"x"*** mide 14 metros. Por consiguiente, la longitud del largo es ***x + 6***; es decir **(14) + 6 = 20**

El lado largo del rectángulo mide 20 metros

INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES

Definición de conceptos

Una relación entre dos conjuntos ***A*** y ***B*** es una regla que asocia a cada elemento de ***A*** con al menos un elemento de ***B***. Al conjunto ***A*** se le llama ***dominio*** de la relación, mientras que al conjunto ***B*** se le llama ***rango o imagen***.

Por ejemplo, el dominio de una relación puede consistir en el conjunto de los alumnos de un salón y su rango es el conjunto de calificaciones.

Particularmente nos interesan las relaciones en las que tanto como su *dominio* como su *rango* consisten en conjuntos de números reales y su correspondencia se establece generalmente por medio de una ecuación.

Por ejemplo, la relación $y = x^2$ nos indica que a cada valor de ***x*** le corresponde un valor de ***y*** que es el cuadrado de ***x***. Para una relación particular podemos obtener fácilmente varios pares de valores que muestran la forma en las que están asociados ***"x"*** y ***"y"***, como lo muestran a continuación: (- 3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16),…

Cada una de la parejas de números representan un par ordenado ya que, por ejemplo, el par (**2, 4**) nos indica que $x = 2$ le corresponde el valor de $y = 4$; mientras que el valor $x = 4$ le corresponde el valor de $y = 16$.

Una relación es un conjunto de pares ordenados

Los primeros elementos del conjunto de pares ordenados de una relación constituyen su dominio y los segundos su rango; por ejemplo en la relación, **R = (1, 4), (2, 7), (3, 10)**, el *dominio es* **[1, 2, 3]** y el *rango es* **[4, 7, 10]**.

Variables y constantes

En una relación entre números reales se presentan dos tipos de cantidades:

a) Constantes
b) Variables

Una ***constante*** es un símbolo que representa un valor fijo; mientras que la ***variable*** es un símbolo que puede representar distintos valores.

Por ejemplo, si consideramos la fórmula $A = \pi d^2/4$, que nos indica el área **A** de un círculo de diámetro ***d***. En esta expresión ***A*** y ***d*** pueden tomar diversos valores por lo que se consideran ***variables***, pero las cantidades ***4*** y ***π*** tienen siempre el mismo valor por lo tanto son ***constantes***.

Variable independiente y variable dependiente

Cuando dos variables están relacionadas entre sí y el valor de una depende del valor que adquiera la otra, a la primera se le llama variable dependiente, mientras que la otra cuyo universo de definición es el dominio de la relación se le llama variable independiente, es decir, la variable independiente es aquella que pude tomar cualquier valor del dominio de la relación.

El dominio de una relación es el conjunto de valores que pude tomar la variable ***x***, y ***el rango*** es el conjunto de valores que puede tomar la variable ***y***.

Formas de representar una relación

Una relación se puede indicar mediante cualquiera de las siguientes formas:

1.- Mediante un enunciado; por ejemplo:

"El área de un círculo varia directamente proporcional con los cuadrados de su radio"

2.- Mediante una ecuación; por ejemplo:

$$A = \pi r^2$$

3.- Mediante un conjunto de pares ordenados; por ejemplo:

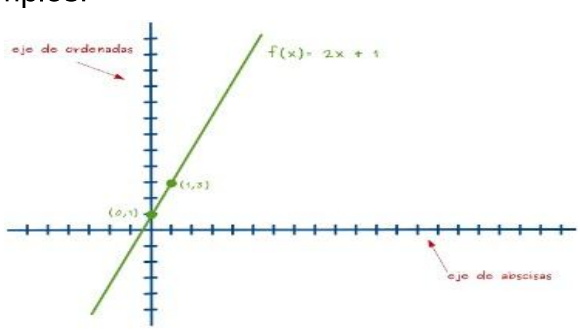
R = [(1, 3.14), (2, 12.56), (3, 28.26), (4, 50.24)]

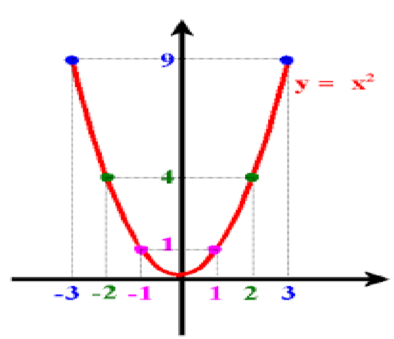
Cuando expresamos una relación de esta forma, los primeros elementos del conjunto de pares ordenados de una relación constituyen su dominio y los segundos su rango.

4.- Una relación también se puede expresar mediante un tabla de valores; por ejemplo:

x	1	2	3	4
y	5	10	15	20

5.- Por último, una relación también se puede representar mediante una gráfica; por ejemplos:





Grafica de una ecuación

La geometría analítica estudia las propiedades de las figuras geométricas mediante un sistema de coordenadas rectangulares, utilizando los conocimientos algebraicos. Es decir, esta disciplina nos permite relacionar una ecuación con una figura geométrica y viceversa, lo que permite conocer más información sobre dicha figura mediante el manejo de ecuaciones algebraicas.

Si se tienen una ecuación con dos variables **"x"** y **"y"**, por ejemplo:

a) $y = 5x - 6$
b) $y = x^2 - 7x + 3$

Por lo general existe un conjunto infinito de puntos cartesianos de la forma ***P(x, y)*** que satisfacen dichas ecuaciones.
Por ejemplo, el punto ***P (4, 7)*** satisface la ecuación ***y = 3x – 5***, ya que si ***x = 4***, entonces ***y = 3(4) – 5***, o sea, ***y = 7***.

El conjunto de todos los puntos que satisfacen una ecuación se llama ***lugar geométrico*** o ***gráfica de la ecuación***.

Gráfica de ecuaciones

Conocer la gráfica de una ecuación es importante porque nos permite observar propiedades y características de dicha expresión que son utilizadas en la interpretación y resolución de problemas.

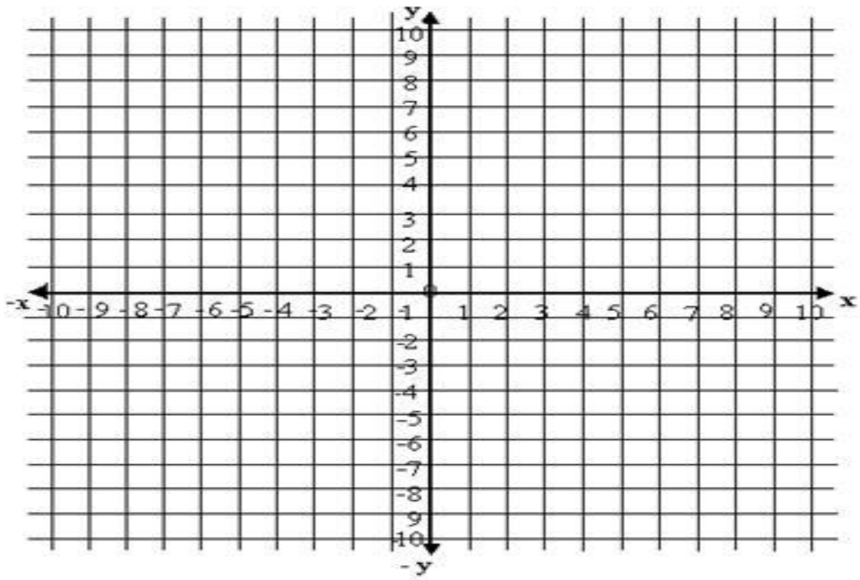
Para trazar la gráfica de una ecuación, primero se determina cierto número suficiente de puntos cartesianos, cuyas coordenadas la satisfagan y después se unen mediante una curva (la cual puede ser una recta).

Lo anterior puede hacerse dando arbitrariamente valores a ***"x"*** y sustituyendo estos valores en la ecuación para encontrar los valores correspondientes de ***"y"***, dichos valores de ***"y"*** deben de ser números reales.

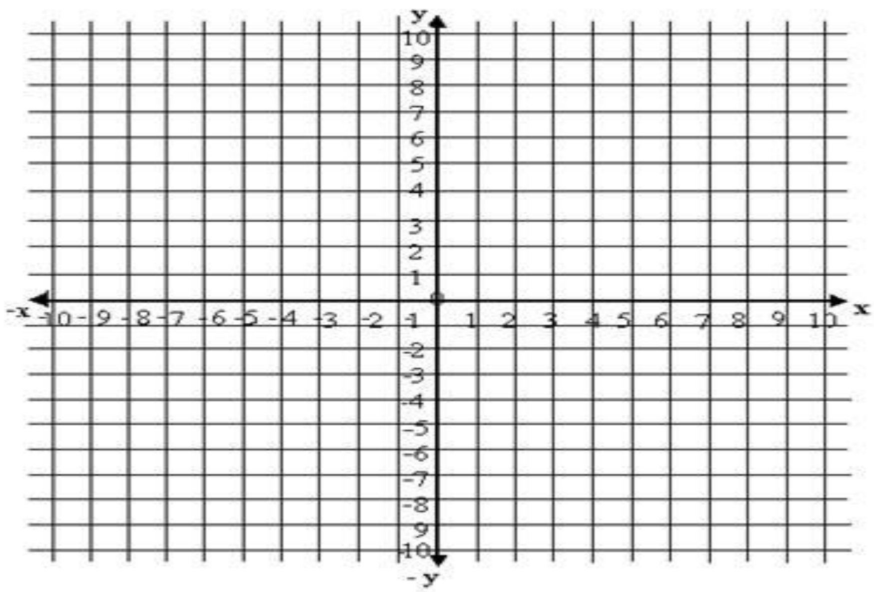
Ejemplo: Traza la gráfica de la ecuación ***y = 2x – 1***

x	***y = 2(-2) – 1 = -3***	***P (x, y)***
-2	***y = 2(-2) – 1 = - 3***	(-2, -3)
-1	***y = 2(-1) – 1 = - 1***	(-1, -1)
0	***y = 2(0) – 1 = 1***	(0, 1)
1	***y = 2(1) – 1 = 3***	(1, 3)
2	***y = 2(2) – 1 = 5***	(2, 5)

A continuación se localizan los puntos cartesianos obtenidos y dibujamos una línea continua que pase por todos ellos.



Ejercicio: Traza la gráfica de la ecuación $\boldsymbol{y = x^2 - 4}$



Funciones

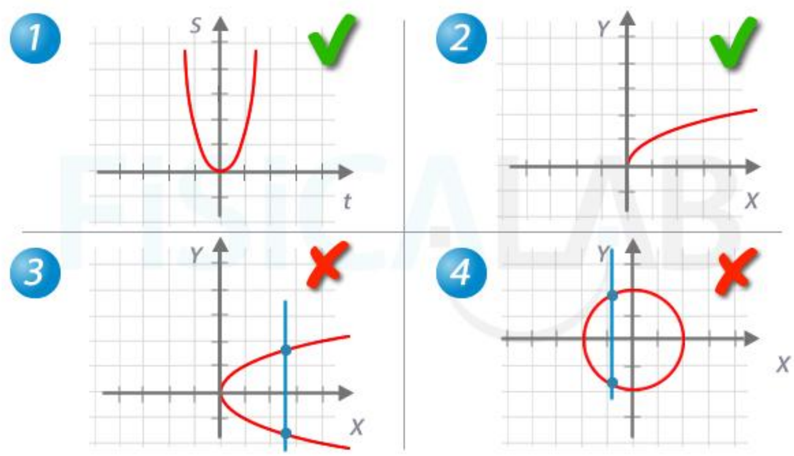
Una relación que tiene la propiedad de que cada elemento de su dominio *le corresponde uno y solo un elemento de su rango*, se ***llama función***.

Es decir, una relación es una función cuando el conjunto de pares ordenados que la constituyen no hay dos con la primera componente igual; es decir, para cada valor de **"x"** corresponde un único valor de **"y".**

Prueba de la recta vertical

Para determinar si la gráfica de una relación es una función se utiliza la prueba de la recta vertical que consiste en lo siguiente:

Si la gráfica de una relación es intersectada en solo un punto por cualquier recta perpendicular al eje de las **"x"** por un punto del dominio, entonces la gráfica es una función; en caso de que la recta intersecte en dos o más puntos no corresponde a una función; por lo tanto, sería una relación.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cuellar, J.A. (2010). Matemáticas I para bachillerato. Editorial Mc. Graw Hill. México.

Allen R. A. y Jimenes, R. (2010). Matemáticas I. Pearson educación. México, 2010.

Loaiza, A. A. (2006). Matemáticas II. México.

Sullivan, M. (2009). Precálculo. Chicago state university. EU.

Referencias electrónicas

Pag: http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-series.html

Pag: web. http://www.monografias.com/trabajos11/traaprox/traaprox.shtml

Pag: http://anjaander.blogspot.com/2008/01/sucesiones-matemticas.html